

**А.В.КОРОЛЕВ**

**ВЫБОР  
ОПТИМАЛЬНОЙ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ  
КОНТАКТИРУЮЩИХ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ  
МАШИН И ПРИБОРОВ**

**1972**

А.В.КОРОЛЕВ

ВЫБОР ОПТИМАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ  
КОНТАКТИРУЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ДЕТАЛЕЙ МАШИН И ПРИБОРОВ

Издательство Саратовского университета

1 9 7 2

В работе изложены результаты теоретического исследования влияния геометрической формы контактирующих упругих тел, в том числе кругового и параболического профиля с произвольным показателем степени, на размеры площадки контакта, сближение и контактные напряжения, а также на силы сопротивления при их относительном скольжении, вращении и перекатывании. Даны рекомендации по выбору оптимальной геометрической формы рабочих поверхностей деталей машин (подшипников качения и скольжения, зубчатых колес, кулачковых механизмов и др.), при которой, с одной стороны, обеспечивается снижение сил трения, с другой стороны, повышение несущей способности контакта. В конечном счете это дает возможность значительно увеличить быстроходность, надежность и долговечность механизмов и машин, снизить их вес и габариты.

Книга рассчитана на инженерно-технических и научных работников различных отраслей машиностроения.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

К современным механизмам и машинам предъявляются высокие требования в отношении их быстроходности, долговечности, грузоподъемности и надежности. Эти параметры качества во многом зависят от контактного взаимодействия рабочих поверхностей отдельных деталей машины, работающих в режиме упругого статического нагружения, скольжения или качения. В связи с этим исключительно важное значение приобретает расчет контакта и сопротивления относительно перемещений реальных упругих тел, позволяющий определить оптимальные условия их взаимодействия. Однако во многих случаях решению этой задачи препятствуют значительные математические трудности.

Впервые контактная задача упругих тел была рассмотрена Герцем. При этом в разложении уравнений поверхностей, ограничивающих упругие тела, в ряд были отброшены все члены, кроме членов второй степени, и, таким образом, вопрос был сведен к расчету контакта двух эллиптических параболоидов. Исследования Герца были дополнены А.Н.Динником [14, 15] и Н.М.Беляевым [3, 4].

Ценный вклад в решение контактной задачи внесли работы Л.А.Галина [5], А.Н.Грубина [10], В.М.Коровчинского [18],

М.Я.Леонова [27], А.И.Лурье [29], [30], В.И.Моссановского [35, 36], Н.И.Мухелишвили [37], И.Я.Штаермана [50], Р.Д.Миндлина [60] и многих других авторов. В результате этих исследований в настоящее время стало возможным определение действующих напряжений и деформаций вблизи зоны контакта для многих случаев сжатия и относительных перемещений упругих тел, в том числе и для тел неоднородных по материалу.

Особый интерес представляют те работы, которые позволяют производить расчет сжатия упругих тел сложной геометрической формы. Этот интерес обусловлен тем, что в практике машиностроения именно с деталями сложной геометрической формы чаще всего приходится иметь дело, и аппроксимация этих поверхностей эллиптическими параболоидами, для которых получено большинство решений, дает в этих случаях большую ошибку расчета. Кроме того, решение контактной задачи для тел сложной геометрической формы позволило бы при конструировании механизмов и машин выбирать такую геометрическую форму, при которой обеспечивается наиболее благоприятное распределение контактных напряжений, наиболее эффективные размеры площадки контакта и сближение упругих тел. А так как последние оказывают исключительно сильное влияние на работоспособность деталей машин, то это дало бы возможность значительно повысить долговечность, увеличить быстроходность механизмов и машин, снизить потери на трение.

Сложную форму реальных тел удобнее всего аппроксимировать параболической зависимостью со степенью равной или отличной от двух. Так, И.Я. Штаерман [50] дал решение контактной задачи, когда начальное расстояние между телами с

круговой площадкой контакта описывается параболической зависимостью, степень которой представляет целое четное число, равное или большее двух. И.Я.Штаерманом впервые также получено решение задачи для тел с эллиптической площадкой контакта, когда начальное расстояние между ними аппроксимируется уравнением четвертой степени.

В работе Л.И.Лурье [29] дано решение контактной задачи когда с упругим полупространством контактирует тело, являющееся параболоидом вращения дробой, в том числе и нецелой степени.

Более общее решение осесимметричной пространственной контактной задачи дал М.Я.Леонов [28]. Он рассмотрел случай, когда одно из соприкасающихся тел является произвольным телом вращения.

Приближенное решение "близкого" касания сжимаемых тел дал М.В.Корывчинский, который уточнил решение Герца при достижении размеров площадки контакта, соизмеримых с размерами контактирующих тел.

Исключительно важное значение в современных условиях приобретает решение контактной задачи для тел сложной геометрической формы с учетом сил трения, возникающих при их взаимном перемещении. Это позволило бы в каждом конкретном случае определять такую геометрическую форму контактирующих поверхностей ответственных деталей машины (подшипников качения, подшипников скольжения, зубчатых колес, кулачковых механизмов и др.), при которой, с одной стороны, обеспечивалось бы снижение сил трения, с другой стороны, повышение несущей способности контакта.

Исследованию механизма трения скольжения посвящено огромное число работ. К их числу относятся работы Г.М.Бартенева [2], Д.А.Галина [5], А.П.Грина [8,9], Б.В.Дерягина [12], [13], И.В.Крагельского [20-24], В.Д.Кузнецова [25, 26], А.Д.Лизарева [31], Н.М.Михина [32-34], А.К. Чертавских [45, 46], А.В.Чичинадзе [47], Ф.Боудена, Д.Тейбора [54], И.Годарда [57], Ф.Линге [59], Г.Томпкинсона [69], Е.Рабиновича [64] и многих других.

Трение качения исследовали А.С.Ахматов [1], Н.И.Глаголев [6, 7], А.Ю.Ишлинский [16], В.Д.Кузнецов [26], С.В.Пинегин [38-41], В.Д. Рабко [42], И.А.Шевелев [48, 49], В.С.Щедров [51], И.Бикерман [53], Р.Бентал [52], К.Джонсон [58], Мичел [62], О.Рейнольде [65], Г.Томплинсон [67, 68], Д.Тейбор [67] и другие.

Все эти работы имеют большое теоретическое и практическое значение, так как вскрывают механизм процесса скольжения и качения, твердых тел, открывают пути снижения потерь энергии на трение, дают возможность производить расчет контактного взаимодействия тел при их относительном перемещении.

Данная работа посвящена исследованию влияния геометрической формы контактирующих упругих тел на размеры площадки контакта, сближение и контактные напряжения при статическом сжатии, а также на силы сопротивления при их относительном скольжении и перекатывании. Расчет сжатия тел производится для круговой площадки контакта, а также для случая, когда площадка контакта представляет собой часть плоскости, ограниченную эллипсом. Начальное расстояние между телами в глав-

ных сечениях задано параболической зависимостью произвольной степени, причем показатель степени в главных сечениях может быть различен.

Сопротивление перекачиванию определяется с учетом кривизны площадки контакта, а также с учетом микро-проскальзывания в зоне контакта и несовершенства упругих свойств материала контактирующих тел.

## I. РАСЧЕТ СЖАТИЯ УПРУГИХ ТЕЛ

### § I. Общая методика расчета сжатия упругих тел

При рассмотрении сложных контактных задач теории упругости необходимо искать наиболее простые и наиболее естественные пути для их решения, так как это обычно позволяет сделать более точный расчет и обеспечить более широкую область его применения.

Расчет соприкосновения упругих тел, особенно в случае сложной их геометрической формы, значительно упрощается, если свести его к случаю давления плоского штампа с упругим полупространством.

Пусть два упругих тела (рис. I) имеют первоначальное касание в точке. Примем эту точку за начало декартовой системы координат. Ось  $OZ$  направим по нормали к поверхностям сжимаемых тел.

Для того чтобы решения и выводы носили более общий характер, в дальнейшем будем иметь дело не с уравнениями поверхностей сжимаемых тел, а с уравнением начального расстояния между точками этих поверхностей, расположенными на одной линии, параллельной общей оси симметрии тел. Так, если

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= f_1(x, y) \\ z_2 &= -f_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- уравнения поверхностей сжимаемых тел, то

$$z_1 - z_2 = f_1(x, y) + f_2(x, y) \quad (2)$$

- уравнение расстояния между соответствующими точками поверхности этих тел. Уравнение (2) является как бы уравнением "совокупной поверхности" соприкасающихся тел. Эта поверхность получится, если все точки поверхности одного тела спроектировать на плоскость  $XOY$ , а точки поверхности другого тела перенести вдоль оси  $OZ$  на расстояние, равное расстоянию соответствующим им точкам первого тела до плоскости  $XOY$ .

Исходя из этого, оси координат  $Ox$  и  $Oy$  направим вдоль главных сечений поверхности, описываемой уравнением (2). В наиболее общем случае угол между этими осями должен быть произвольным. Но так как мы будем рассматривать только контактирование тел с осесимметричной площадкой контакта, то угол между главными сечениями поверхности (2) примем равным  $90^\circ$ .

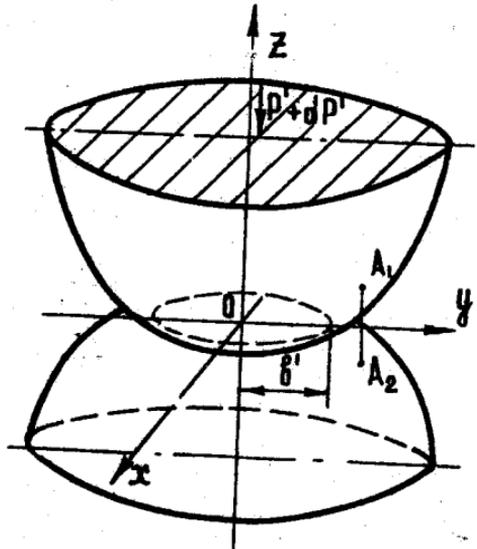


Рис. I. Схема скатия упругих тел.

Пусть вдоль оси тел действует внешняя нагрузка  $P'$ , сжимающая упругие тела. Вследствие этого между телами возникнет площадка контакта, которую ввиду её малости по сравнению с размерами самих тел можно считать плоской.

Приложим к сжимаемым телам дополнительную нагрузку  $dP'$ . Под действием этой нагрузки тела переместятся навстречу друг другу на величину  $d\alpha$ , а размер площадки контакта в плоскости  $ZOY$  станет равным  $2\beta'$ . Величина усилия  $dP'$  настолько мала, что изменением размеров площадки контакта и величины  $2\beta'$  можно пренебречь. Но тогда мы имеем случай вдавливания плоского штампа в упругое пространство. Выражение для определения сближения плоского кругового, эллиптического и некоторых других форм в плане штампа хорошо известно. В общем случае его можно записать так:

$$\alpha_0 = \frac{P' \nu K}{\beta'}, \quad (3)$$

где  $\alpha_0$  - сближение плоского штампа с упругим полупространством;  
 $K$  - коэффициент, учитывающий форму контактной площадки;  
 $\nu$  - величина, характеризующая упругие свойства полупространства.

Тогда, поочередно считая одно из контактирующих тел штампом, а другое - полупространством, определим их перемещения  $d\alpha_1$  и  $d\alpha_2$  под действием силы  $dP'$ :

$$\left. \begin{aligned} d\alpha_1 &= \frac{dP' \nu_1 K}{\beta'} \\ d\alpha_2 &= \frac{dP' \nu_2 K}{\beta'} \end{aligned} \right\}$$

Отсюда найдем общую величину сближения тел под действием внешней нагрузки  $dP'$ :

$$d\alpha_0 = d\alpha_1 + d\alpha_2 = \frac{dP' (\nu_1 + \nu_2) K}{\beta'} \quad (4)$$

Общее сближение тел  $\alpha_0$  под действием внешней нагрузки найдем путем интегрирования правой части равенства (4) от нуля до  $P$  :

$$\alpha_0 = (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP' K}{\delta^3} . \quad (5)$$

В общем случае величина  $K$ , характеризующая геометрическую форму площадки контакта, в процессе сжатия тел может изменяться. Если же форма площадки контакта остается неизменной, то коэффициент  $K$  можно вынести из-под знака интеграла, и для определения сближения тел получается более простое выражение:

$$\alpha_0 = K (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP'}{\delta^3} . \quad (6)$$

Итак, под действием нагрузки  $P$  тела переместятся навстречу друг другу на величину  $\alpha_0$ . В результате этого сближения совместятся все точки контактирующих тел, расположенных в пределах площадки контакта.

Рассмотрим, например, две точки  $A_1$  и  $A_2$ , находящиеся на поверхности сжимаемых тел, которые будут совмещены после происшедшей упругой деформации. Обозначим упругие перемещения этих точек соответственно через  $\alpha_1(x, y)$  и  $\alpha_2(x, y)$ , а их координаты до начала сжатия, определяемые выражением (I), через  $Z_1$  и  $Z_2$ . Будем считать, что упругие перемещения точек поверхностей соприкасающихся тел осуществляются только в направлении оси  $OZ$ . Тогда на основании того, что координаты точек  $A_1$  и  $A_2$  после вступления их в контакт становятся одинаковыми, можно записать следующее условие,

связывающее перемещения обоих тел:

$$[Z_1 + \alpha_1(x, y)] - [Z_2 + \alpha_2(x, y)] = \alpha_0. \quad (7)$$

Окончательно это может быть записано в такой форме:

$$Z_1 - Z_2 = \alpha_0 - \alpha_1(x, y) + \alpha_2(x, y). \quad (8)$$

Уравнение (8) справедливо для всех точек тел, находящихся после их сжатия в пределах площадки контакта, в том числе и для крайних точек. Найдя, например, упругие перемещения точек контактирующих тел на границе площадки контакта и подставив их в уравнение (8), получим ещё два условия для определения размера и формы площадки контакта.

Упругие перемещения точек поверхности тел, находящихся на границе площадки контакта, найдем способом, подобным тому, который мы использовали для определения сближения тел. Пусть площадка контакта, возникающая между сжимаемыми телами, под действием текущей внешней нагрузки  $P'$  определяется размером  $\delta'$  (рис.2), а точка М, находящаяся на расстоянии  $\delta$  от начальной точки контакта, является крайней точкой площадки контакта в сечении  $ZOY$ , соответствующей внешней нагрузке  $P$ . Найдём перемещение в точке М под действием нагрузки  $dP'$ .

Так как для контакта упругих тел, находящихся под внешней нагрузкой  $dP'$ , справедливы все зависимости, относящиеся к случаю вдавливания в упругое полупространство плоского штампа с той же площадкой контакта, то, очевидно, что и распределение контактных напряжений от усилия  $dP'$  по площадке контакта будет тождественным распределению напряжений под плоским штампом. Обозначим напряжение, действующее на площад-

не контакта от внешней нагрузки  $dP'$ , через  $q(x, y)$ .

Перемещение точки  $M$

найдем по принципу сложения сил. При этом каждый элементарный участок площадки контакта, нагруженный усилием  $q(x, y)$ , рассматриваем как место приложения сосредоточенной нормальной силы, имеющей величину

$$dQ = q(x, y) S d\psi' \cdot dS, \quad (9)$$

где  $S$  - расстояние от точки  $M$  до элементарной площадки;

$d\psi'$  - угол охвата элементарного участка площадки контакта касательными.

Нормальная деформация точки упругого полупространства и от действия сосредоточенной силы  $dQ$ , как известно, определяется следующим уравнением:

$$u = \frac{dQ(1-\mu^2)}{\pi E S}, \quad (10)$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона;

$E$  - модуль упругости;

$S$  - расстояние между заданной точкой и точкой приложения сосредоточенной силы  $dQ$ .

Введем обозначение

$$v = \frac{1-\mu^2}{\pi E} \quad (11)$$

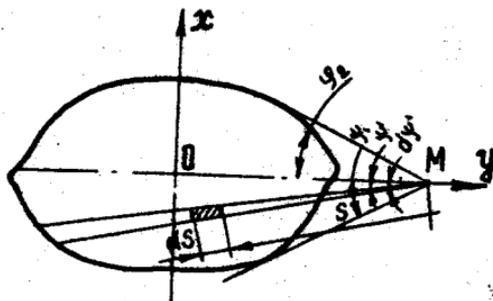


Рис.2. Схема определения деформации в точке  $M$ , расположенной вне площадки контакта, нагруженной усилием  $dP'$ .

Подставляя в уравнение (10) значение нагрузки  $dQ$ , определяемой выражением (9), и выражая  $q(x, y)$  через  $S$  и  $\psi'$ :

$$\begin{aligned} x &= S \cdot \sin \psi' \\ y &= b - S \cos \psi', \end{aligned}$$

с учетом обозначения (11) найдем элементарное перемещение в точке  $M$  соответственно для первого и второго тела:

$$\left. \begin{aligned} du_1 &= q(S, \psi') v_1 d\psi' dS \\ du_2 &= q(S, \psi') v_2 d\psi' dS \end{aligned} \right\}$$

Полная деформация в точке  $M$  для первого и второго тела от всей нагрузки  $dP'$  определится после двойного интегрирования по  $S$  и  $\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} q(S, \psi') d\psi' dS \\ u_2 &= v_2 \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} q(S, \psi') d\psi' dS \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Давление  $q(S, \psi')$  в зоне площадки контакта от нагрузки  $dP'$  в конечном счете выражается через  $dP'$ . Пусть

$$q(S, \psi') = dP' \cdot F(S, \psi'). \quad (13)$$

Тогда выражение (12) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= v_1 dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS \\ u_2 &= v_2 dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Общее перемещение  $\alpha_{1\beta}$  и  $\alpha_{2\beta}$  в точке М под действием нагрузки Р определяется интегрированием правой части (I4) по Р' от нуля до Р :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1\beta} &= v_1 \int_0^P dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS \\ \alpha_{2\beta} &= v_2 \int_0^P dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS \end{aligned} \right\}$$

или

$$\alpha_{\beta} = \alpha_{1\beta} + \alpha_{2\beta} = (v_1 + v_2) \int_0^P dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS. \quad (I5)$$

Подставляя найденные значения упругих перемещений по краю площадки контакта в (8) и учитывая, что упругие перемещения второго тела противоположны по знаку перемещениям первого тела и их нужно брать со знаком минус, найдем:

$$z_1 - z_2 = \alpha_0 - (v_1 + v_2) \int_0^P dP' \int_{\psi_1}^{\psi_2} \int_{S_{\min}(\psi)}^{S_{\max}(\psi)} F(S, \psi') d\psi' dS. \quad (I6)$$

Таким образом найдем упругие перемещения по краю площадки контакта в плоскости  $Z O X$ . Два уравнения, подобных уравнению (I6), и уравнение (5) дают возможность довольно просто определить сближение упругих тел, размеры и форму площадки контакта.

Найдем давление по площадке контакта сжимаемых тел. Если давление по площадке контакта от внешней нагрузки определяется зависимостью

$$q(x, y) = dQ' F(x, y),$$

то давление  $p(x, y)$  по площадке контакта от внешней нагрузки  $P$  определится интегрированием этого выражения от  $P_n$  до  $P$  по  $P'$ :

$$p(x, y) = \int_{P_n}^P F(x', y') dP' \quad (17)$$

Так как давление от внешней нагрузки ограничивается площадкой контакта, то  $P_n$  - это значение внешней нагрузки, соответствующее области контакта, на границе которой находится точка с координатами  $x', y'$ .

Однако очень часто оказывается, что выразить давление согласно зависимости (17) в элементарных функциях не представляется возможным. В таком случае удобно найти давление в центре площадки контакта

$$p(x_0, y_0) = \int_0^P F(x, y) dP', \quad (18)$$

а затем подобрать такое выражение для определения давления по площадке контакта  $p(x, y)$ , при котором будет выдерживаться следующее условие:

$$P = \int_F p(x, y) dF, \quad (19)$$

где  $F$  - область контакта.

Как видно, методика расчета контакта упругих тел очень проста. Правда, уравнения (5) и (16) не всегда выражаются в элементарных функциях. Однако при наличии электронно-вычислительных машин трудно решаемые уравнения не могут явиться препятствием в расчетах.

Изложенная методика базируется на общепринятых в теории упругости допущениях: сжимаемые тела абсолютно гладкие, размеры площадки контакта малы по сравнению с размерами самих тел, пластическая деформация отсутствует, упругие перемещения точек

поверхности сжимаемых тел осуществляются в направлении действия внешней нагрузки. Так как эти допущения общеприняты, то полученные решения не требуют специальной экспериментальной проверки.

## § 2. Энергетическая теория сжатия

В некоторых случаях при расчете сложного контакта упругих тел (например, при решении осесимметричной контактной задачи или расчета сжатия с двумя или несколькими начальными точками касания) уравнений (5), (16) и (17) может оказаться недостаточно для определения всех параметров сжатия. Иногда при относительно больших размерах площадки контакта и вследствие ограниченности размеров реальных тел появляется необходимость уточнить расчет сжатия тел, выполненный при допущении о малости размеров площадки контакта. В таких случаях можно воспользоваться энергетической теорией сжатия, основанной на равенстве работ по упругому сжатию тел различной геометрической формы.

Так, если элементарное перемещение плоского штампа под действием элементарной нагрузки выражается уравнением

$$d\alpha = \frac{dP' (v_1 + v_2) K}{\delta},$$

то работа внешней нагрузки  $P$  определится выражением

$$A = \int_0^P P' d\alpha = \frac{P^2 (v_1 + v_2) K}{2\delta}. \quad (20)$$

Работа сжатия упругих тел произвольной геометрической формы равна

$$A = \int_0^P \alpha_{\text{ср}} dP', \quad (21)$$

где  $\alpha_{\text{ср}}$  - средняя величина перемещения по всей площадке контакта от внешней нагрузки  $dP'$ .

Величина  $\alpha_{\text{ср}}$  равна отношению объема упругих перемещений в пределах площадки контакта  $V$  к площади этой площадки  $F$ :

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{V}{F} \quad (22)$$

Тогда

$$A = \int_0^P \frac{V}{F} dP' \quad (23)$$

Найдя зависимость  $V$  и  $F$  от  $P$  и подставив их в выражение (23), можно определить работу сжатия контактирующих тел. Приравняв эту работу работе вдавливания в упругое полупространство абсолютно жесткого плоского штампа (20) с размерами, равными размерам площадки контакта двух упругих тел, можно найти дополнительное условие для определения параметров сжатия этих тел:

$$\int \frac{V}{F} dP = \frac{P^2 (v_1 + v_2) K}{2b} \quad (24)$$

Работа внешней нагрузки по упругому перемещению в зоне контакта равна работе по упругому перемещению точек контактирующих тел за пределами площадки контакта. Действительно, если из упругого полупространства в направлении нормали к его поверхности вырезать стержень по контуру зоны нагружения, то под действием нагрузки  $P$  стержень переместился бы на величину, пропорциональную длине стержня, т.е. равную бесконечности. Следовательно, внешняя нагрузка на упругие тела, распределенная по площадке контакта, уравнивается равной ей силой

реакции ненагруженной части этих тел.

И далее, если контактирующие тела со всех сторон ограничены, то силы поверхностного натяжения тел не в состоянии уравновесить внешнюю нагрузку. В таком случае часть энергии сжатия пойдет на упругие перемещения поверхностей этих тел в зоне нагружения, а другая часть - на сжатие самого тела.

Согласно закону Гука, упругая деформация тела  $\alpha_T$  равна

$$\alpha_T = \frac{\ell \cdot P}{E \cdot F_T},$$

где  $\ell$  - длина тела;

$F_T$  - поперечное сечение тела.

Если тело в направлении действия внешней нагрузки имеет переменное сечение, то  $F_T$  - величина переменная. При этом элементарная упругая деформация тела равна

$$d\alpha_T = \frac{P \cdot d\ell}{E \cdot F_T(\ell)},$$

а полная деформация

$$\alpha_T = \frac{P}{E} \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{F_T(\ell)}. \quad (25)$$

Работа сжатия тела  $A_T$  определится уравнением:

$$A_T = \int_0^P \alpha_T dP = \frac{1}{E} \int_0^P P dP \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{F_T(\ell)} = \frac{P^2}{2E} \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{F_T(\ell)}. \quad (26)$$

Тогда полная работа силы  $P$

$$A = \frac{P^2}{2E} \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{F_T(\ell)} + \int_0^P \frac{V}{F} dP'. \quad (27)$$

Приравняв эту работу работе вдавливания в упругое полупространство жесткого плоского штампа, можно уточнить условие

(24):

$$\int_0^P \frac{V}{F} dP' = \frac{P^2 (v_1 + v_2) K}{2b} - \frac{P^2}{2E} \int_0^{\ell} \frac{d\ell}{F_T(\ell)}. \quad (28)$$

Уравнение (28) открывает возможность решать контактную задачу в случае, когда площадка контакта соизмерима с размерами самих тел.

Энергетическая теория скатия дает возможность уточнить решения, выполненные на основе множества допущений. Решения для плоского штампа, которое мы взяли за основу при определении размеров площадки контакта и сближения упругих тел, тоже получено на основе допущений. Так, по краям зоны контакта плоского штампа с упругим полупространством развиваются большие контактные напряжения и, следовательно, происходит пластическое течение металла, в то время как все выводы сделаны с учетом только упругих перемещений.

С наименьшими погрешностями можно определить работу равномерно распределенной по определенной части упругого полупространства нагрузки  $q$ . Упругие перемещения в зоне нагружения с учетом соотношений (9) и (10) равны

$$u(x, y) = q \cdot \nu \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{S(\psi)} dS.$$

Среднее перемещение по площадке действия нагрузки

$$\alpha_{\text{ср}} = \frac{1}{F} \int u(x, y) dF = \frac{P \cdot \nu}{F^2} \int dF \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{S(\psi)} dS.$$

Тогда работа равномерно распределенной нагрузки равна

$$\begin{aligned} A &= \int_0^P \alpha_{\text{ср}} dP = \frac{\nu}{F^2} \int_0^P P dP \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{S(\psi)} dS = \\ &= \frac{P^2 \nu}{2F^2} \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{S(\psi)} dS. \end{aligned}$$

Приравняв эту работу работе вдавливания в упругое полупространство жесткого штампа, можно уточнить уже известные в этой области решения.

Все дальнейшие расчеты будут производиться для круговой и эллиптической площадок контакта. Однако данную методику расчета можно использовать и применительно к другим формам зоны нарушения.

В качестве примера найдем перемещение жесткого, плоского прямоугольного штампа, вдавливаемого в плоскую грань полубесконечного сплошного тела.

Известны решения, выполненные для равномерного давления, распределенного по прямоугольникам с различными соотношениями сторон  $a:b$  [66]. Полученные результаты можно представить в следующем виде:

$$\alpha_{\text{ср}} = m \frac{P \cdot \nu \cdot \pi}{\sqrt{F}}$$

где  $m$  - числовой коэффициент, зависящий от отношения  $a:b$

(табл. I);

$F$  - величина площади, на которую действует нагрузка;

$\alpha_{\text{ср}}$  - средняя величина деформации.

Таблица I

Значения коэффициента  $m$

$a:b$	1	1,5	2	3	5	10	100
$m$	0,95	0,94	0,92	0,88	0,82	0,71	0,37

Тогда работа по упругому перемещению точек полупространства в пределах прямоугольника

$$A = \int_0^P \alpha_{\text{ср}} dP = m \frac{\nu \pi}{\sqrt{F}} \int_0^P P dP = m \frac{P^2 \nu \pi}{2\sqrt{F}}$$

Работа по упругому перемещению плоского жесткого штампа в упругое полупространство определяется выражением (20). Исходя из равенства этих работ, получим:

$$m = \frac{P^2 \nu \pi}{2 \sqrt{ab}} = \frac{P^2 \nu K}{2 \delta}$$

откуда

$$K = m \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}} \pi$$

Подставляя это значение  $K$  в равенство (3), найдем перемещение плоского прямоугольного штампа, вдавливаемого в упругое полупространство:

$$\alpha_{\text{па}} = \frac{P \cdot \nu \cdot m \cdot \pi}{\sqrt{ab}}$$

Таким образом, перемещение плоского прямоугольного штампа равно среднему перемещению нагруженной равномерным давлением прямоугольной части полупространства.

Вообще для всех случаев, когда упругое сближение тел прямо пропорционально внешней нагрузке, средние упругие перемещения в зоне контакта, при условии равенства внешней нагрузки и упругих свойств материалов контактирующих тел, равны и не зависят от геометрической формы контактирующих тел.

Итак,

$$\frac{\alpha_{\text{ср}1}}{\alpha_{\text{ср}2}} = \frac{P_1 \nu_1}{P_2 \nu_2}, \quad (29)$$

где индексы 1 и 2 обозначают различные случаи нагружения контактирующих тел, в том числе и различной их геометрической формы.

§ 3. Сжатие упругих тел, ограниченных поверх-  
ностями вращения

Рассмотрим случай, когда внешняя нагрузка  $P$  направлена по оси симметрии сжимаемых тел, а площадка контакта представляет из себя часть плоскости, ограниченную окружностью.

Расположим начало цилиндрической системы координат  $Z, \varphi, z$  в начальной точке контакта тел, а ось  $Z$  направим по оси симметрии сжимаемых тел.

Пусть первоначальный зазор между упругими телами, контактирующими в точке, задан уравнением

$$Z_1 + Z_2 = Az^n, \quad (30)$$

где  $A$  - коэффициент;

$n$  - показатель степени - любое

целое или дробное число

больше нуля.

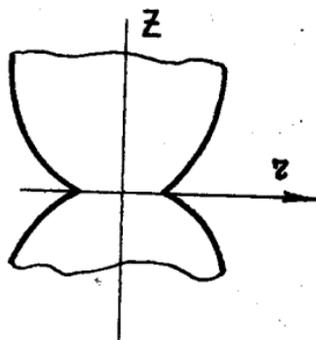


Рис.3. Схема контакта тел с круговой площадкой контакта.

В уравнении (30) подразумевается абсолютное значение  $z$ . Найдем сближение тел. Известно, что сближение круглого цилиндрического штампа  $d\alpha$  с упругим полупространством определяется уравнением

$$d\alpha = \frac{\pi r dP'}{2b'}, \quad (31)$$

где  $b'$  - радиус основания штампа;

$dP'$  - внешняя нагрузка, действующая на штамп;

$\sigma$  - величина, характеризующая упругие свойства полу-пространства, определяемая выражением (II).

Тогда, согласно уравнению (6), упругие перемещения под действием силы  $P$  в центре площадки контакта будут равны

$$\alpha_0 = \frac{\pi (v_1 + v_2)}{2} \int_0^P \frac{dP'}{\beta'} . \quad (32)$$

Предположим, что текущий размер  $\beta'$  области контакта выражается через внешнюю нагрузку  $P'$ , сжимающую упругие тела, следующим образом:

$$\beta' = K P'^k . \quad (33)$$

Подставляя это значение  $\beta'$  в (32), определим величину упругого сближения тел:

$$\alpha_0 = \frac{\pi (v_1 + v_2)}{2K} \int_0^P \frac{dP'}{P'^k} = \frac{\pi (v_1 + v_2)}{2k(1-k)} P^{1-k} = \frac{\pi (v_1 + v_2) P}{2\beta (1-k)} . \quad (34)$$

Чтобы найти размер площадки контакта, определим упругое перемещение по краю площадки контакта. Для этого воспользуемся уравнением (I6). Сначала найдем интеграл:

$$J_1 = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} F(S, \psi) dS , \quad (35)$$

где  $F(S, \psi')$  - функция, определяемая характером распределения давления под плоским круглым штампом.

Как известно, давление  $q(z)$ , распределенное под плоским круглым штампом, от внешней нагрузки  $dP'$  определяется следующим образом.

$$q(z) = \frac{dP'}{2\pi \beta' \sqrt{\beta'^2 - z^2}} \quad (36)$$

Вводя обозначения

$$z^2 = S^2 \sin^2 \psi' + (\beta - S \cos \psi')^2,$$

найдем

$$q(z) = \frac{dP'}{2\pi\beta'\sqrt{2\beta S \cos \psi' - S^2 - (\beta^2 - \beta'^2)}}$$

где  $S$  - расстояние от точки, расположенной вне круга контакта до точки приложения элементарной силы (рис.4);

$\beta$  - расстояние от точки  $M$  до центра площадки контакта;

$\psi$  - угол охвата нагруженной части касательными.

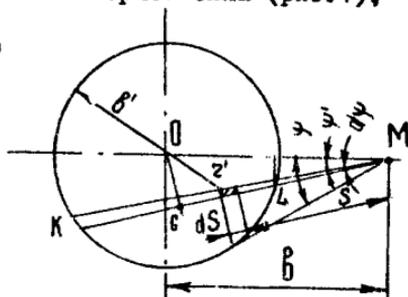


Рис.4. Схема определения упругих перемещений в точке  $M$ , расположенной вне зоны давления плоского кругового жесткого штампа на упругое полупространство.

Тогда

$$F(S, \psi') = \frac{1}{2\pi\beta'\sqrt{2\beta S \cos \psi' - S^2 - (\beta^2 - \beta'^2)}}$$

Подставляя это значение  $F(S, \psi')$  в

(35), определим

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\psi} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{dS}{\beta'\sqrt{2\beta S \cos \psi' - S^2 - (\beta^2 - \beta'^2)}} \quad (37)$$

Минимальное и максимальное значение  $S$  для данного угла  $\psi'$  найдем из рис. 4 :

$$S_{\min} = MC - CL,$$

$$S_{\max} = MC + CK.$$

Так как  $LK$  - хорда окружности радиуса  $\beta'$ , а  $OC$  - перпендикуляр к ней, то

$$LC = CK = \sqrt{\beta'^2 - \beta^2 \sin^2 \psi'};$$

$$MC = \beta \cdot \cos \psi$$

Тогда

$$S_{\min} = b \cos \psi' - \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \psi'} ;$$

$$S_{\max} = b \cos \psi' + \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2 \psi'} . \quad (38)$$

Угол охвата площадки контакта  $\Psi$  равен:

$$\Psi = \alpha z c \sin \frac{b'}{b}$$

Определив верхнее и нижнее значение интеграла (37), найдем сам интеграл. Для этого воспользуемся подстановкой Эйлера

$$\sqrt{\frac{S-S_1}{S-S_2}} = t ,$$

где  $S_1$  и  $S_2$  - корни подкоренного выражения знаменателя интеграла (37).

Эти корни определяются выражением (38). Тогда

$$t = \sqrt{\frac{S-S_{\min}}{S_{\max}-S}} ; S = \frac{t^2 S_{\max} + S_{\min}}{1+t^2} ; dS = 2t \frac{S_{\max} - S_{\min}}{(1+t^2)^2} dt . \quad (39)$$

Знаменатель подинтегрального выражения (36) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \sqrt{2bS \cos \psi' - S^2 - (b^2 - b'^2)} &= \sqrt{\frac{S-S_{\min}}{S_{\max}-S} (S_{\max}-S)^2} = t(S_{\max}-S) = \\ &= (S_{\max} - \frac{t^2 S_{\max} + S_{\min}}{1+t^2}) = \frac{t}{1+t^2} (S_{\max} - S_{\min}) . \end{aligned} \quad (40)$$

В силу (39) и (40) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi b'} \int_0^{\Psi} d\psi \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{dS}{\sqrt{2bS \cos \psi' - S^2 - (b^2 - b'^2)}} &= \frac{2}{\pi b'} \int_0^{\Psi} d\psi' \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \\ &= \frac{1}{b'} \int_0^{\Psi} d\psi' = \frac{\Psi}{b'} = \frac{1}{b'} \alpha z c \sin \frac{b'}{b} \end{aligned}$$

Подставим значение вычисленного интеграла в выражение (16):

$$Z_1 - Z_2 = \alpha_0 - (v_1 - v_2) \int_0^P \frac{1}{b'} a z e \sin \frac{p'}{b} dp' \quad (41)$$

Обозначим

$$\frac{p'}{b} = u$$

Если  $P'$  текущее значение внешней нагрузки, а  $P$  - значение нагрузки при размере площадки контакта, равном  $b$ , то, исходя из выражения (33), можно записать:

$$\frac{b'}{b} = \left(\frac{P'}{P}\right)^k = u$$

Тогда

$$dP' = P \frac{u^{k-1}}{k} du$$

и выражение (41) переписется таким образом:

$$Z_1 - Z_2 = \alpha_0 \frac{P(v_1 + v_2)}{k \cdot b} \int_0^1 u^{k-2} a z e \sin u du \quad (42)$$

Интеграл в правой части равенства (42) обозначим через

$$J_b = \int_0^1 u^{k-2} a z e \sin u du \quad (43)$$

Подставив в уравнение (42) значение сближения тел из выражения (34) и учитывая (30), получим;

$$A \cdot b^n = \frac{P(v_1 + v_2)}{b} \left[ \frac{\pi}{2(1-k)} - \frac{J_b}{k} \right] \quad (44)$$

Отсюда найдем значение  $\delta$  :

$$\delta = \left[ \frac{P(v_1, v_2)}{A} \left( \frac{\pi}{2-2k} - \frac{J_\delta}{k} \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (45)$$

Сравнивая выражение (45) и (33), найдем:

$$k = \frac{1}{n+1} \quad (46)$$

Тогда окончательно запишем:

$$\delta = \left[ \frac{P(v_1 + v_2)(n+1)}{A} \left( \frac{\pi}{2n} - J_\delta \right) \right]^{\frac{1}{n+1}} ; \quad (47)$$

$$\alpha_0 = \frac{P(v_1 + v_2)(n+1)\pi}{2\delta n} \quad (48)$$

Значение интеграла  $J_\delta$  можно определить, раскладывая под-интегральное выражение (43) в ряд, либо по формуле Симпсона. Некоторые значения интеграла  $J_\delta$  в зависимости от показателя степени  $n$  даны в табл.2.

Таблица 2

Значение интеграла  $J_\delta$  в зависимости от показателя формы сжимаемых тел  $n$

$n$	1,5	2	2,29	2,6	3	3,5
$J_\delta$	0,4658	0,3927	0,362013	0,333336	0,3026760	0,2717333

Для удобства в практическом пользовании формулу (47) лучше представить в таком виде:

$$\delta = \lambda \left[ \frac{P(v_1 + v_2)}{A} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad \lambda = [(n+1) \left( \frac{\pi}{2n} - J_\delta \right)]^{\frac{1}{n+1}} \quad (49)$$

Значение коэффициента  $\lambda$  в зависимости от значения  $n$  даны в табл.3.

Таблица 3

Значение коэффициента  $\lambda$  в зависимости от показателя формы сжимаемых тел  $n$

$n$	1,5	2,0	2,6	3,0	3,5
$\lambda$	1,1610	1,0562	0,99297	0,9695	0,94906

Напряжение в центре площадки контакта  $P_0$  можно определить исходя из выражения (18).

Интегрируя правую часть выражения (36) при  $z=0$ , получим

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^P \frac{dP'}{b'^2} \quad (50)$$

Учитывая (33) и принимая во внимание (46), определим

$$P_0 = \frac{1}{2\pi K^2} \int_0^P \frac{dP}{P^{\frac{2}{n+1}}} = \frac{P^{1-\frac{2}{n+1}} (n+1)}{2\pi K^2 (n-1)}$$

Выражая  $P_0$  через  $P$ , окончательно получим

$$P_0 = \frac{P(n+1)}{2\pi b^2 (n-1)} \quad (51)$$

Найдем распределение напряжений по площадке контакта.

Для этого, зная распределение напряжений вдоль площадки контакта от нагрузки  $dP'$

$$q(z) = \frac{dP'}{2\pi b'^2 \sqrt{1-z^2/b'^2}},$$

просуммируем эти элементарные напряжения в заданной точке при изменении внешней нагрузки от величины  $P_2$ , соответствующей размеру площадки контакта на границе которой находится

заданная точка, до  $P$ . Тогда

$$p(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{P_2}^P \frac{dP'}{\beta^{1/2} \sqrt{1 - \frac{z^2}{\beta^{1/2}}}}$$
 (52)

Обозначим

$$\frac{z}{\beta^{1/2}} = u.$$

Отсюда:

$$\beta^{1/2} = \frac{z}{u}; \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1}{n+1}} = u; dP' = \frac{P_2(n+1)}{u^{n+2}} du.$$

Преобразуя (52) в соответствии с новым обозначением,

определим:

$$p(z) = \frac{P_2(n+1)}{2\pi z^2} \int_{z_0}^z \frac{du}{u^n \sqrt{1-u^2}}$$
 (53)

Обозначим

$$\frac{z}{\beta} = t.$$

Так как

$$\left(\frac{P_2}{P}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \frac{z}{\beta} = t, \text{ а } P_2 = P t^{n+1},$$

то

$$p(z) = \frac{P(n+1)t^{n+1}}{2\pi z^2} \int_t^1 \frac{du}{u^n \sqrt{1-u^2}}$$
 (54)

Интеграл в правой части (54) можно решить с помощью

подстановки

$$u = \sin k.$$

Тогда

$$\int_t^1 \frac{du}{u^n \sqrt{1-u^2}} = \int_{\arcsin t}^{\pi/2} \frac{dk}{\sin^n k} = \left[ -\frac{\cos k}{(n-1)\sin^{n-1}k} - \frac{(n-2)\cos k}{(n-1)(n-3)\sin^{n-3}k} - \frac{(n-2)(n-4)\cos k}{(n-1)(n-3)(n-5)\sin^{n-5}k} - \frac{(n-2)(n-4)(n-6)\cos k}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\sin^{n-7}k} \dots \right]_{\arcsin t}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-t^2}}{(n-1)t^{n-1}} \left[ 1 + \frac{n-2}{n-3}t^2 + \frac{(n-2)(n-4)}{(n-3)(n-5)}t^4 + \frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{(n-3)(n-5)(n-7)}t^6 + \dots \right] \quad (55)$$

Таким образом, искомый интеграл представляет собой числовой ряд. При четном  $n$  большем или равном двум ( $n=2, 4, 6, 8$  и т.д.) ряд конечен. При нечетном  $n$  ряд равен бесконечности. При дробном  $n$  - это медленно сходящийся ряд. При  $n=3$

$$\int \frac{du}{u^3 \sqrt{1-u^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{arcc} \sin t}{2} \quad (56)$$

С учетом (55) и (56) выражение (54) можно представить в общем виде следующим образом:

$$P(z) = \frac{P(n+1)}{2\pi(n-1)B^2} \sqrt{1-t^2} N_n(t), \quad (57)$$

где  $N_n(t)$  - полином  $(n-2)$ -й степени от  $t$ . В частности,

$$N_2(t) = 1;$$

$$N_3(t) = 1 - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arcc} \sin t}{2};$$

$$N_4(t) = 1 + 2t^2;$$

$$N_6(t) = \left( 1 + \frac{4}{3}t^2 + \frac{8}{3}t^4 \right);$$

$$N_8(t) = \left( 1 + \frac{6}{5}t^2 + \frac{24}{15}t^4 + \frac{48}{15}t^6 \right). \quad (58)$$

Итак, распределение напряжений по площадке контакта в

значительной степени зависит от геометрической формы контактирующих тел (30). При  $n=2$  эпюр давления имеет вид эллипсоида вращения с расположением максимума в центре площадки контакта. При  $n > 3$  максимум давления смещается к краю площадки контакта и далее от места максимума давление падает, обращаясь в нуль на краю. Давление в центре площадки с увеличением  $n$  уменьшается.

В табл. 4 даны значения давления в центре площадки соприкосновения  $P_0$  и максимальное давление  $P_{max}$ , а также место его расположения  $z_{max}$ .

Таблица 4  
Таблица значений  $P_{max}$ ,  $P_0$ ,  $z_{max}$  при различных  $n$

$n$	2	3	4	6	8
$\frac{P_0}{P_{cp}}$	1,5	1	0,853	0,7	0,643
$\frac{P_{max}}{P_{cp}}$	1,5	1,0278	1,178	1,241	1,333
$\frac{z_{max}}{b}$	0	0,35	0,7071	0,8199	0,864

Полученные результаты относительно распределения контактных напряжений на круговой площадке контакта при четном  $n \geq 2$  совпадают с выводами А.И.Лурье [29].

Интересно проследить за изменением контактных напряжений при  $n < 2$ . В этом случае распределение контактных напряжений удобно представить в таком общем виде:

$$p(z) = P_0 \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^n \quad (59)$$

Значение показателя степени  $\ell$  найдем из условия (19).

В полярных координатах  $z$  и  $\varphi$  элемент площадки  $dF$  равен

$$dF = z dz d\varphi.$$

Тогда

$$P = \int_F p(z) dF = P_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^b \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^\ell z dz;$$

то есть

$$P = 2\pi P_0 \int_0^b \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^\ell z dz. \quad (60)$$

Обозначим  $z^2/b^2 = u$ .

Тогда

$$z = b\sqrt{u}, \quad dz = \frac{b du}{2\sqrt{u}}.$$

Подставляя новые переменные под интеграл (60) и меняя пределы интегрирования, получим:

$$P = \pi P_0 b^2 \int_0^1 (1-u)^\ell du. \quad (61)$$

После небольших преобразований окончательно найдем:

$$P = \frac{\pi P_0 b^2}{\ell + 1}. \quad (62)$$

Сравнивая (62) и (59), определим

$$\ell = \frac{3-n}{2(n-1)}.$$

Тогда

$$p(z) = P_0 \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} = \frac{P(n+1)}{2\pi b^2(n-1)} \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}}. \quad (63)$$

Итак, формула (49) определяет радиус площадки контакта сжатых тел, формула (47) позволяет рассчитать сближение упругих тел, а формулы (57) и (63) определяют давление в об-

дасти площадки контакта.

Несложно проверить, что при  $n$  равном двум формулы (47), (49) и (57) в точности соответствуют формулам Герца.

Действительно, интеграл (43) при этом будет равен

$$J_B = \int_0^1 u \cdot \alpha z c \sin u \, du = \left[ \left( \frac{u^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \alpha z c \sin u + \frac{u}{4} \sqrt{1-u^2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

Подставляя это значение  $J_B$  и значение  $n=2$  в уравнение (48), получим:

$$b = \left[ \frac{3\pi P (v_1 + v_2)}{8A} \right]^{\frac{1}{3}}$$

В полном соответствии формул (47) и (57) формулам Герца при  $n=2$  легко убедиться, подставив в них это значение  $n$ .

Попробуем проверить соответствие решений (47), (49) и (57) с энергетической теорией сжатия. Для этого найдем среднее упругое перемещение в зоне контакта.

Из выражения (8) следует:

$$\alpha(x, y) = \alpha_0 (z_1 - z_2),$$

где  $\alpha(x, y)$  - упругое перемещение точек поверхности контактирующих тел в пределах площадки контакта.

Так как начальное расстояние между контактирующими телами задано уравнением (30), то

$$\alpha(x, y) = \alpha_0 - Az^n$$

Тогда сумма всех упругих перемещений  $V$  в пределах площадки контакта равна

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^b (\alpha_0 - Az^n) z \, dz = 4\alpha_0 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^b z \, dz - 4A \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^b z^{n+1} \, dz = \alpha_0 \pi b^2 - 2A \frac{\pi b^{n+2}}{n+2}$$

Поделив это выражение на площадь зоны контакта, найдем среднее упругое перемещение на контакте:

$$\alpha_{\text{ср}} = \alpha_0 - A \delta^n \frac{2}{n+2} \quad (64)$$

Исходя из хорошо известных решений, нетрудно определить среднюю величину деформации в пределах равномерно нагруженного круга. Она равна

$$\alpha_{\text{ср}} = 1,688 \frac{P \cdot r}{\delta} \quad (65)$$

На основе (29) можно считать, что этой же величине должно быть равно перемещение  $\alpha$  круглого цилиндрического штампа, вдавливаемого в упругое полупространство своим плоским торцом. Однако согласно формуле Я.Буссинеза, это перемещение равно

$$\alpha = 1,571 \frac{P r}{\delta} \quad (66)$$

Как видно, разница между упругими перемещениями круглого плоского штампа, определенными по формуле теории упругости и по формуле энергетической теории сжатия, составляет около 7,5%. По всей вероятности, эта разница появляется за счет того, что при выводе зависимости (66) не учитывается пластическое течение металла по границе площадки нагружения и изменения в связи с этим распределения контактных напряжений.

Разница между выражениями (64) и (65), найденная с учетом формул (47) и (49), получается меньше и составляет для всех значений  $n$  примерно 4,5%. Эта разница незначительна, и поэтому её можно не учитывать в расчетах. Тем более, что сделать это трудно, так как уравнение получается одно, а неизвестных ( $\alpha$  и  $\delta$ ) два.

Важно то, что энергетическая теория и общая методика расчета сжатия упругих тел не противоречат друг другу, и это подтверждает правильность выполненных исследований.

Формулы (47), (49) и (63) очень просты и удобны в использовании. Они показывают значительное влияние на параметры сжатия упругих тел их геометрической формы.

Меньшим величинам показателя степени  $n$  в уравнении (30) соответствует большая величина сближения тел и меньшие размеры площадки контакта, и наоборот. Следовательно, с целью увеличения жесткости стыковых соединений нужно использовать большие показатели степени  $n$ , а с целью уменьшения размеров контакта - меньшие.

В сильной степени от показателя  $n$  (30) зависят контактные напряжения. При  $n < 3$  наибольшие контактные напряжения сосредотачиваются в центре площадки контакта, причем, чем меньше  $n$ , тем величина максимальных контактных напряжений больше.

При  $n = 3$  контактные напряжения по площадке контакта распределяются приблизительно равномерно. В этом случае величина контактных напряжений получается наименьшая.

При  $n > 3$  максимальные контактные напряжения перемещаются к периферии, а в центре контакта с увеличением напряжения уменьшаются. При  $n \rightarrow \infty$  мы приходим к случаю соприкосновения с упругим полупространством плоского кругового штампа.

При  $n = 1$  имеем случай вдавливания в упругое полупространство конуса. Давление под острием штампа оказывается бесконечным, вызывая пластическое течение металла.

§ 4. Соприкасание упругих тел с эллиптической площадкой контакта и с начальным расстоянием между телами, описываемым параболической зависимостью произвольной степени

Рассмотрим более общий случай сжатия упругих тел.

Построим прямоугольную систему координат  $x, y, z$ , расположив начало координат в точке начального касания и совместив плоскость  $xOy$  с общей касательной плоскостью к поверхностям сжимаемых тел (рис. I).

Пусть начальный зазор между телами в плоскостях  $ZOx$  и  $ZOy$  соответственно выражается уравнением

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= Ax^n \\ z_1 - z_2 &= By^n \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

( $x$  и  $y$  берутся по модулю),

а в качестве области контакта примем часть плоскости  $xOy$  ограниченную эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (68)$$

В уравнениях (67) и (68)

$A$  и  $B$  - коэффициенты;

$n$  - показатель степени - любое целое или дробное число, большее нуля;

$b$  и  $a$  - соответственно большая и малая полуоси эллипса контакта.

Найдем сближение тел. При этом исходим из того, что перемещение  $d\alpha$  плоского эллиптического в плане штампа при

бжати его силой  $dP'$  с упругим полупространством определяется известным выражением

$$d\alpha = \frac{\nu dP'}{\beta'} K(e), \quad (69)$$

где  $K(e)$  - полный эллиптический интеграл первого рода (см. приложение I).

Тогда на основании уравнения (6), суммируя упругие перемещения в центре площадки контакта первого и второго тела, получим сближение этих тел:

$$\alpha_0 = (\nu_1 + \nu_2) K(e) \int_0^P \frac{dP'}{\beta'}. \quad (70)$$

Предположим, что зависимость размера большой полуоси эллипса контакта от внешней нагрузки  $P$  имеет следующий вид:

$$\beta = kP^k. \quad (71)$$

Подставляя это значение  $\beta$  в уравнение (70), определим

$$\alpha_0 = \frac{(\nu_1 + \nu_2) K(e)}{k} \int_0^P \frac{dP}{P^k} = \frac{(\nu_1 + \nu_2) K(e) P^{1-k}}{k(1-k)},$$

или

$$\alpha_0 = \frac{P(\nu_1 + \nu_2) K(e)}{\beta(1-k)}. \quad (72)$$

Для определения размеров полуосей эллипса контакта определим по изложенной выше методике упругие перемещения обоих тел по краям площадки контакта в сечениях  $ZOy$  и  $ZOx$ .

Вначале решим задачу для малой полуоси эллипса. Обозначим через  $a', b'$  - текущие размеры малой и большой полуоси эллипса, через  $x, y$  - текущие значения координат точек плоскости, ограниченной эллипсом, через  $P'$  - текущую внешнюю

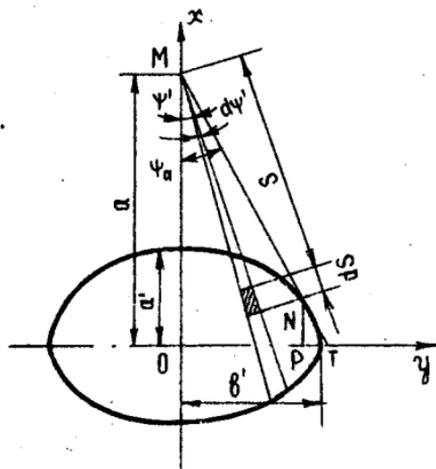


Рис.5. Схема определения контактных напряжений в точке М, расположенной вне эллиптической площадки контакта, нагруженной внешним усилием  $dP'$ .

центральную нагрузку.

Давление под плоским эллиптическим в плане штампом от внешней нагрузки  $dP'$ , как известно, распределяется следующим образом:

$$q(x,y) = \frac{dP'}{2\pi a'b' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}}} \quad (73)$$

Решение будем искать в полярных координатах  $S, \psi'$ .

Из рис.5

$$\begin{aligned} x &= a - S \cos \psi', \\ y &= S \sin \psi'. \end{aligned} \quad (74)$$

Производя в соответствии с обозначением (74) преобразования выражения (73), определим

$$q(S, \psi') = \frac{dP'}{2\pi a'b' \sqrt{1 - \frac{(a - S \cos \psi')^2}{a'^2} - \frac{S^2 \cos^2 \psi'}{b'^2}}}$$

Тогда согласно (13)

$$F(S, \psi') = \frac{1}{2\pi a'b' \sqrt{1 - \frac{(a - S \cos \psi')^2}{a'^2} - \frac{S^2 \cos^2 \psi'}{b'^2}}}$$

Подставляя это значение  $F(S, \psi')$  в (15), найдем

$$\alpha_0 = \frac{v_1 + v_2}{2\pi} \int_0^P \frac{dP'}{a'b'} \int_0^{\psi_0} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{dS}{\sqrt{1 - \frac{(a - S \cos \psi')^2}{a'^2} - \frac{S^2 \sin^2 \psi'}{b'^2}}} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2\pi} \int_0^P d\rho' \int_0^{\psi_a} d\psi' \int_{S_{\min}}^{S_{\max}(\psi')} \frac{dS}{\sqrt{\alpha'^2 \beta'^2 - \alpha^2 \beta^2 + 2\alpha \beta'^2 S \cos \psi' - S^2 \beta'^2 \cos^2 \psi' - S^2 \alpha'^2 \sin^2 \psi'}} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2\pi} \int_0^P d\rho' \int_0^{\psi_a} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{dS}{\sqrt{2\alpha \beta'^2 S \cos \psi' - S^2 (\beta'^2 \cos^2 \psi' + \alpha'^2 \sin^2 \psi') - \beta'^2 (\alpha^2 - \alpha'^2)}} =$$

$$= \frac{v_1 + v_2}{2\pi} \int_0^P d\rho' \int_0^{\psi_a} d\psi' \left[ \frac{-1}{\sqrt{\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi'}} \arcsin \frac{-(\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi') + \alpha \beta'^2 \cos \psi'}{\sqrt{\alpha^2 \beta'^2 \cos^2 \psi' - \beta'^2 (\alpha^2 - \alpha'^2) (\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi')}} \right]_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')}$$

Найдем минимальное и максимальное значение  $S$ . Для этого подставим значение  $x, y$ , выраженные через  $S$ , в уравнение эллипса:

$$\frac{(\alpha - S \cos \psi')^2}{\alpha^2} + \frac{S^2 \sin^2 \psi'}{\beta^2} = 1$$

Отсюда после освобождения от знаменателей и группировки членов по  $S$  определим:

$$S^2 (\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi') - 2 S \beta'^2 \alpha \cos \psi' + \beta'^2 (\alpha^2 - \alpha'^2) = 0$$

Тогда

$$S = \frac{\alpha \beta'^2 \cos \psi' \pm \beta' \sqrt{\beta'^2 \alpha^2 \cos^2 \psi' - (\alpha^2 - \alpha'^2) (\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi')}}{\alpha'^2 \sin^2 \psi' + \beta'^2 \cos^2 \psi'}$$

В этом выражении знак плюс берется для максимального значения  $S$ , знак минус - для минимального. Подставляя минимальное и максимальное значение  $S$  в уравнение (75), найдем:

$$\alpha_a = \frac{v_1 + v_2}{2} \int_0^P dP' \int_0^{\psi_a} \frac{d\psi'}{\sqrt{a'^2 \sin^2 \psi' + b'^2 e \cos^2 \psi'}} \quad (76)$$

Внесем  $b'$  из-под знака интеграла и выразим  $\cos \psi'$  через  $\sin \psi'$ . Тогда получим

$$\alpha_a = (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP'}{b'} \int_0^{\psi_a} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi'}} \quad (77)$$

где  $e$  - эксцентриситет эллипса

$$e = \sqrt{1 - \frac{a'^2}{b'^2}}$$

Интеграл

$$\int_0^{\psi_a} \frac{d\psi'}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi'}}$$

называется неполным эллиптическим интегралом I-го ряда. Он обозначается через  $F(e, \psi_a)$  и определяется по таблицам в зависимости от значений  $e$  и  $\psi_a$ .

Поэтому можно записать:

$$\alpha_a = (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP'}{b'} F(e, \psi_a) \quad (78)$$

Найдем предельное значение угла  $\psi_a$ .

Тангенс этого угла (рис.5) равен

$$\operatorname{tg} \psi_a = -\frac{dy}{dx}$$

Так как

$$y = b' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2}}, \quad \text{а} \quad x = a' \sqrt{1 - \frac{y^2}{b'^2}},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b'x}{a'^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a'^2}}} = -\frac{b'\sqrt{b'^2-y^2}}{a'y}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \psi_a = \frac{b'\sqrt{b'^2-y^2}}{a'y} \quad (79)$$

Значение  $y$  найдем из пропорции

$$\frac{a}{y+PT} = \frac{x}{PT}$$

Но

$$PT = x \operatorname{tg} \psi_a = \frac{b'^2-y^2}{y}$$

Тогда

$$\frac{ay}{b'^2} = \frac{x \cdot y}{b'^2-y^2} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b'^2} = \frac{a'\sqrt{b'^2-y^2}}{b'(b'^2-y^2)}$$

Отсюда

$$y = b'\sqrt{1-\frac{a'^2}{a^2}}$$

Подставляя это значение  $y$  в выражение (79), окончательно определим

$$\operatorname{tg} \psi_a = \frac{b'}{a\sqrt{1-\frac{a'^2}{a^2}}} \quad (80)$$

Найдем выражение для определения перемещений на границе большой полуоси эллипса площадки контакта упругих тел. Для этого выполним те же построения, что и в предыдущем случае. Все обозначения оставляем прежними.

$$\text{Из рис. 6 найдем } x = s \sin \psi', \quad y = b - s \cos \psi'$$

Подставляя это значение  $x, y$  в выражение (73), а затем в уравнение (15) и учитывая, что  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_8$ , определим

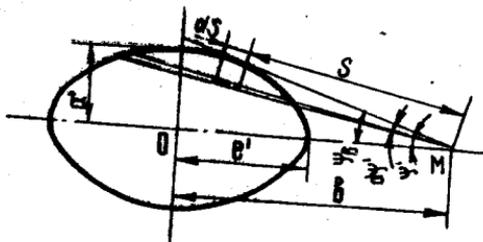


Рис.6.Схема для определения перемещений в т.М, расположенной вне эллиптической площадки контакта вдоль её большой оси.

$$\begin{aligned}
 d_{\theta} &= \frac{v_1 + v_2}{\pi} \int_0^p \frac{dp'}{a'b'} \int_0^{\psi_0} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{S^2 \sin^2 \psi'}{a'^2} - \frac{(b - S \cos \psi')^2}{b'^2}}} = \\
 &= \frac{v_1 + v_2}{\pi} \int_0^p dp' \int_0^{\psi_0} d\psi' \int_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')} \frac{ds}{\sqrt{2Sb\alpha'^2 \cos \psi' - S^2(\alpha'^2 \cos^2 \psi' + b'^2 \sin^2 \psi') - \alpha'^2(b^2 - b'^2)}} = \\
 &= \frac{v_1 + v_2}{\pi} \int_0^p dp' \int_0^{\psi_0} d\psi' \left[ \frac{-1}{\sqrt{\alpha'^2 \cos^2 \psi' + b'^2 \sin^2 \psi'}} \alpha' \epsilon \sin \frac{-(\alpha'^2 \cos^2 \psi' + b'^2 \sin^2 \psi') + \alpha'^2 b \cos \psi'}{\alpha' b' \sqrt{\alpha'^2 \cos^2 \psi' + b'^2 \sin^2 \psi'}} \right]_{S_{\min}(\psi')}^{S_{\max}(\psi')}
 \end{aligned}$$

(81)

Экстремальные значения  $S$  найдем, подставив значения  $x, y$ , выраженные через  $S$ , в уравнение эллипса

$$\frac{S^2 \sin^2 \psi'}{\alpha'^2} + \frac{(b - S \cos \psi')^2}{b'^2} = 1.$$

После преобразований

$$S^2(\alpha'^2 \cos^2 \psi' + \beta'^2 \sin^2 \psi') - 2S\alpha'^2 \beta' \cos \psi' + \alpha^2(\beta^2 - \beta'^2) = 0,$$

и тогда

$$S = \frac{\alpha'^2 \beta' \cos \psi' \pm \alpha' \beta' \sqrt{\alpha'^2 \cos^2 \psi' - (\beta^2 - \beta'^2) \sin^2 \psi'}}{\beta'^2 \sin^2 \psi' + \alpha'^2 \cos^2 \psi'} \quad (82)$$

Аналогично предыдущему используем это значение  $S$  со знаком плюс перед квадратным корнем для верхнего предела и со знаком минус - для нижнего предела  $\psi$  (61), найдем

$$\alpha_\beta = (\nu_1 + \nu_2) \int_0^P P' dP \int_0^{\psi_\beta} \frac{d\psi'}{\sqrt{\alpha'^2 \cos^2 \psi' + \beta'^2 \sin^2 \psi'}} \quad (88)$$

Обозначим

$$\cos \psi' = \sin \varphi; \quad \frac{\pi}{2} \geq \psi' \geq \left(\frac{\pi}{2} - \psi_\beta\right).$$

Тогда  $-\sin \psi' d\psi' = \cos \varphi d\varphi; \quad d\psi' = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$

Подставляя под знак интеграла (63) значения новых переменных, меняя пределы интегрирования и вынося из-под корня  $\beta'$ , после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \alpha_\beta &= (\nu_1 + \nu_2) \int_0^P \frac{dP'}{\beta'} \int_{\frac{\pi}{2} - \psi_\beta}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, = \\ &= (\nu_1 + \nu_2) \int_0^P \frac{dP'}{\beta'} [K(e) - F(e, \frac{\pi}{2} - \psi_\beta)]. \end{aligned} \quad (84)$$

Предельное значение угла  $\psi_\beta$  определяется точно так же, как и  $\psi_\alpha$ . Тангенс этого угла равен

$$\operatorname{tg} \psi_\beta = \frac{\alpha'}{\beta \sqrt{1 - \frac{\beta'^2}{\beta^2}}}. \quad (85)$$

Считая эксцентриситет эллипса контакта при различных нагрузках постоянным, будем иметь:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = u$$

Выражая через эту переменную уравнения (80) и (85) и учитывая, что

$$\beta' = \frac{\alpha'}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \alpha \alpha' = \beta \sqrt{1-e^2},$$

можем записать:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha} &= \alpha z c \operatorname{tg} \frac{u}{\sqrt{1-e^2} \sqrt{1-u^2}}, \\ \psi_{\beta} &= \alpha z c \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-e^2} \cdot u}{\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

(86)

На основании выражения (71) имеем:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \left(\frac{P'}{P}\right)^k = u.$$

Отсюда

$$dP = \frac{Pu^{k-1} \cdot du}{k}.$$

Найдем также

$$\beta' = \beta \cdot u.$$

Подставив это значение дифференциала и переменных в выражения (78) и (83), получим:

$$\begin{aligned} \alpha_{\alpha} &= \frac{P(v_1 + v_2)}{\beta \cdot k} \int_0^1 u^{k-2} F(e, \psi_{\alpha}) du, \\ \alpha_{\beta} &= \frac{P(v_1 + v_2)}{\beta \cdot k} \left[ \frac{k \cdot K(e)}{1-k} - \int_0^1 u^{k-2} F\left(e, \frac{\pi}{2} - \psi_{\alpha}\right) du \right]. \end{aligned}$$

(87)

Обозначим интегралы правой части равенств (87):

$$\begin{aligned} J_{\alpha} &= \int_0^1 u^{k-2} F(e, \psi_{\alpha}) du, \\ J_{\beta} &= \int_0^1 u^{k-2} F\left(e, \frac{\pi}{2} - \psi_{\alpha}\right) du. \end{aligned}$$

(88)

Тогда

$$\alpha_a = \frac{P(v_1 + v_2)}{b \cdot k} J_a ;$$

$$\alpha_b = \frac{P(v_1 + v_2)}{b \cdot k} \left[ \frac{k \cdot K(e)}{1-k} - J_b \right] \quad (89)$$

Интегралы (88) можно вычислить по формуле Симпсона либо путем разложения в ряд неполного эллиптического интеграла. Их значения в зависимости от показателя степени  $n$  и эксцентриситета эллипса  $e$  даны в табл.5.

Подставляя значение  $\alpha_0$  из уравнения (79),  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  из (89) в выражение (8), с учетом (67) определим:

$$A a^n = \alpha_0 - \alpha_a = \frac{P(v_1 + v_2)}{b} \left[ \frac{K(e)}{1-k} - \frac{J_a}{k} \right] ; \quad (90)$$

$$B b^n = \alpha_0 - \alpha_b = \frac{P(v_1 + v_2)}{k \cdot b} J_b .$$

Из второго выражения (90) определим

$$b = \left[ \frac{P(v_1 + v_2) J_b}{B \cdot k} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (91)$$

Сравнивая (91) и (71), найдем

$$k = \frac{1}{n+1} .$$

Тогда окончательно запишем выражения для сближения тел

$$\alpha_0 = \frac{P(v_1 + v_2)(n+1)K(e)}{b \cdot n} \quad (92)$$

и для размера большой полуоси эллипса контакта

$$b = \left[ \frac{P(v_1 + v_2)(n+1)J_b}{B} \right]^{\frac{1}{n+1}} \quad (93)$$

Зная большую полуось эллипса  $b$ , найдем его малую полуось  $a$  по формуле:

$$a = b\sqrt{1-e^2} \quad (94)$$

Из соотношений (90) найдем

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{(1-e^2)^{n+1}} J_8}{\frac{K(e)}{n} - J_a} \quad (95)$$

Уравнение (95) определяет эксцентриситет эллипса контакта  $e$  по заданному отношению  $\frac{b}{a}$ . Так как эта зависимость задана в неявном виде, то необходимо сначала просчитать отношение  $\frac{b}{a}$  для фиксированных значений  $e$  и  $n$ , а уже потом по таблице или графику можно определять значение  $e$  при заданных  $n$  и  $\frac{b}{a}$ . Так как величина  $b$  относится к большой, а величина  $a$  к малой полуоси пятна контакта, то отношение  $\frac{b}{a}$  всегда меньше единицы.

Для практического пользования выражение (98) удобнее привести к виду

$$b = \lambda \left[ \frac{P(v_1 + v_2)}{b} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (96)$$

где

$$\lambda = [(n+1) J_8]^{\frac{1}{n+1}}$$

Значение коэффициента  $\lambda$  и эксцентриситета эллипса  $e$  определяются по табл.5 в зависимости от исходных значений показателя формы тел  $n$  и отношения  $\frac{b}{a}$ .

Найдем напряжение в центре площадки контакта. Согласно (18) и (73), при  $x$  и  $y$ , равных нулю,

$$p_0 = \frac{1}{2x} \int_0^x \frac{dP'}{a'b'} \quad (97)$$

Подставляя в (97) значения  $\alpha'$  и  $\beta'$ , выраженные через  $P'$

$$\beta' = K P'^{\frac{1}{n+1}},$$

$$\alpha' = N P'^{\frac{1}{n+1}},$$

получим

или

$$P_0 = \frac{1}{2\pi K \cdot N} \int_0^P \frac{dP'}{P'^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{P'^{\frac{1}{n+1}} (n+1)}{2\pi K \cdot N (n-1)}$$

$$P_0 = \frac{P(n+1)}{2\pi(n-1)\alpha\beta} \quad (98)$$

Распределение давления в зоне площадки контакта для  $n < 2$  будем искать в виде

$$P(x, y) = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\ell} \quad (99)$$

Значение  $\ell$  найдем из выражения

$$P = \int P(x, y) dF = 4P_0 \int_0^{\beta} dy \int_0^{\alpha(y)} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\ell} dx \quad (100)$$

Для вычисления интеграла (100) перейдем от прямоугольных координат  $x, y$  к полярным координатам  $z, \varphi$ . Полагая

$$x = z \cdot \cos \varphi; \quad y = z \cdot \sin \varphi,$$

найдем

$$\int_0^{\beta} dy \int_0^{\alpha(y)} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\ell} dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{z_0(\varphi)} \left[1 - \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2}\right) z^2\right]^{\ell} \cdot z dz, \quad (101)$$

где предел интегрирования  $z_0(\varphi)$  определяется условием

$$\frac{z_0^2 \cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{z_0^2 \sin^2 \varphi}{\beta^2} = 1.$$

Обозначим

$$\left(\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2}\right) z^2 = u.$$

Тогда

$$z = \sqrt{\frac{u}{\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2}}};$$

$$dz = \frac{du}{2\sqrt{u} \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2}\right)}; \quad \text{где} \quad \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\beta^2} = \frac{1}{z_0^2}.$$

Таблица 5

Значение коэффициента  $\lambda$  и эксцентриситета эллипса  $e$   
при различных  $n$  и  $B/A$

$\frac{B}{A}$	$J_n$	$J_B$	$\lambda$	$e$	$\sqrt{1-e^2}$
$n = 1.5$					
0,1449	I,3412	I,5242	I,706	0,9848	0,1736
0,3112	0,952I	I,1166	I,508	0,9397	0,342
0,4728	0,7580	0,909I	I,389	0,866	0,5
0,7482	0,5673	0,6962	I,248	0,6428	0,766
0,8550	0,5193	0,6413	I,208	0,5	0,866
0,9165	0,483I	0,6006	I,177	0,342	0,9397
I	0,4658	0,5814	I,16I	0	I
$n = 2$					
0,06743	I,0895	I,0895	I,484I	0,9848	0,1736
0,1964	0,7849	0,7849	I,3304	0,9397	0,342
0,3518	0,6303	0,6303	I,2366	0,866	0,5
0,6703	0,4763	0,4763	I,1264	0,6428	0,766
0,8059	0,4366	0,4366	I,094I	0,5	0,866
0,9109	0,4113	0,4113	I,0726	0,342	0,9397
I,0	0,3927	0,3927	I,0562	0	I
$n = 3$					
0,0133	0,7930	0,6557	I,273	0,9848	0,1736
0,0733	0,5833	0,4610	I,165	0,9397	0,342
0,187I	0,4745	0,3656	I,099	0,866	0,5
0,5248	0,3634	0,271I	I,02I	0,6428	0,766
0,7067	0,3344	0,2470	0,997	0,5	0,866
0,888	0,3134	0,2426	0,9926	0,342	0,9397
I,0	0,3027	0,2209	0,9695	0	I

Подставляя эти значения дифференциала и переменной в выражение (I01), найдем

$$\int_0^{\ell} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\ell} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{\beta^2}} \int_0^1 (1-u)^{\ell} du =$$

$$= \frac{a^2 b^2}{\ell+1} \left[ \frac{1}{\beta \cdot a} \operatorname{arctg} \left( \frac{a}{\beta} \operatorname{tg} \varphi \right) \right]_0^{2\pi} \quad (I02)$$

В определенном интеграле (I02) возможна смена пределов интегрирования, так как подинтегральная функция имеет период  $\pi$ .

Подставляя в (I02) пределы интегрирования, определим

$$P = \frac{P_0 \pi a b^{\beta}}{(\ell+1)} \quad (I03)$$

Сравнивая (I03) и (98), найдем

$$\ell = \frac{3-n}{2(n-1)}$$

Тогда

$$P(x, y) = P_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}},$$

или окончательно

$$P(x, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi(n-1)ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} \quad (I04)$$

Формулой (I04) можно пользоваться при  $n \leq 2$ . При  $n > 2$  выражения в каждой точке площадки контакта необходимо определять суммированием их элементарных значений, соответствующих элементарной внешней нагрузке при текущем значении размера этой площадки.

Так как напряжение  $q(x, y)$  от элементарной внешней нагрузки  $dP'$  распределяется в зоне контакта в соответствии с уравнением

$$q(x, y) = \frac{dP}{\pi a' b' \sqrt{1 - \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2}}},$$

, то напряжение  $P(x, y)$  от нагрузки  $P$  будет равно

$$P(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{P, y}^P \frac{dP'}{\alpha' \beta' \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2}}}, \quad (105)$$

где  $P, y$  - значение внешней нагрузки, соответствующее области контакта, на границе которой находится заданная точка с координатами  $x, y$ .

Интеграл в правой части равенства (105) будем решать при условии, что  $x$  и  $y$  - постоянные, соответствующие заданной точке, а  $\alpha'$  и  $\beta'$  - переменные, соответствующие текущему значению площадки контакта. Обозначим

$$u^2 = \frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2}$$

Отсюда, выражая  $\alpha'$  через  $\beta'$ :  $\alpha' = \beta' \sqrt{1 - e^2}$ , имеем:

$$\beta'^2 = \frac{x^2 + y^2 (1 - e^2)}{u^2 (1 - e^2)}$$

Так как

$$\left(\frac{P}{P'}\right)^{\frac{2}{n+1}} = \left(\frac{\beta}{\beta'}\right)^2,$$

$$\text{то } P' = P \left[ \frac{x^2 + y^2 (1 - e^2)}{\beta'^2 (1 - e^2)} \right]^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{u^{n+1}}; \quad dP' = P \left[ \frac{x^2 + y^2 (1 - e^2)}{\beta'^2 (1 - e^2)} \right]^{\frac{n+1}{2}} \frac{(n+1)}{u^{n+2}} du.$$

Таким образом, после преобразования имеем

$$\int_{P, y}^P \frac{dP'}{\alpha' \beta' \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha'^2} - \frac{y^2}{\beta'^2}}} = \frac{P(n+1) t^{n-1}}{\alpha \beta^2 \sqrt{1 - e^2}} \int_t^1 \frac{du}{u^n \sqrt{1 - u^2}}, \quad (106)$$

где

$$t^2 = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}. \quad (107)$$

Как видно, интеграл (106) идентичен (55). Поэтому можно записать:

$$P(x, y) = \frac{P(n+1)}{2\pi(n-1)\alpha\beta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}} N_n(t), \quad (108)$$

где  $N_n(t)$  полином  $(n-2)$ -й степени от  $t$  и имеет те же значения, что и в выражении (58).

$$N_2(t) = 1;$$

$$N_3(t) = 1 - \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} \ln \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \sin t}{2};$$

$$N_4(t) = \left[ 1 + 2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right];$$

$$N_5(t) = \left[ 1 + \frac{4}{3} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{8}{3} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 \right];$$

$$N_6(t) = \left[ 1 + \frac{6}{5} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{24}{15} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{48}{15} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^3 \right].$$

(I09)

Уравнения (92), (94), (96), (I04) и (I08) полностью решают поставленную контактную задачу. Эти формулы очень просты и удобны в использовании. При необходимости, вычислив с помощью ЭВМ значения интегралов (88) и найдя отношения  $\frac{B}{A}$  из уравнения (95), несложно определить обложения и размеры площадки контакта для любых  $n$ , не указанных в табл.5.

Решение для сжатия упругих тел, начальное расстояние между которыми выражается однородным многочленом четвертой степени, дал И.Я.Штаерман [50] на основе свойств потенциала эллиптического диска. Решение это выполнено приближенно, хотя при малых значениях эксцентриситета эллипса контакта ошибка получается незначительной. Формулы (92), (96) и (I08) при  $n=4$  идентичны

формулам Штаермана, хотя значение эксцентриситета и размер большой полуоси эллипса контакта, подсчитанные по приведенным здесь зависимостям, получаются несколько больше.

При  $n = 2$  формулы (94), (96), (92) и (104) дают результат, аналогичный расчету по формулам Герца. В качестве примера произведем расчет размера площадки, контакта шара с внутренним кольцом шарикоподшипника и сравним его с экспериментальными данными.

Эксперименты проводились при сжатии шара диаметром  $d_m = 25,375$  мм с желобом радиусом  $r_x = 13,089$  и диаметром кольца по дну желоба  $D_x = 114,624$  мм. Чистота поверхности шара составляла  $\nabla 12$ , чистота поверхности желоба  $\nabla VII$ . Шар и желоб были изготовлены из стали ШХ15, закаленной до твердости HRC 63-64.

По формулам Герца, определение размеров площадки контакта связано с предварительным определением вспомогательного коэффициента  $\tau$  :

$$\tau = \frac{\frac{1}{R_x} + \frac{1}{r_x}}{\frac{4}{d_m} + \frac{1}{R_x} - \frac{1}{r_x}} = \frac{\frac{1}{57,312} + \frac{1}{13,089}}{\frac{4}{25,375} + \frac{1}{57,312} - \frac{1}{13,089}} = 0,9513.$$

Затем по формулам

$$b = M \sqrt{\frac{3\pi}{2} \frac{P(u_1 + u_2)}{\left(\frac{4}{d_m} - \frac{1}{R_x} - \frac{1}{r_x}\right)}},$$

$$a = \frac{4}{M} b$$

определяются большая и малая полуоси эллипса контакта. Значение коэффициентов  $M$  и  $y$  определяется по специальным таблицам в зависимости от значения коэффициента  $\tau$  (см., например: Р.Д.Бейзельман, Б.В.Цыпкин, Л.Я.Перель. Подшипники качения (справочник), М., "Машиностроение" 1967 г.) при  $\tau = 0,9513$ ,  $M = 4,164$ ;  $y = 0,3939$ .

Упругие постоянные сжимаемых тел равны и определяются по формуле (II). Для стали  $E=2,1 \cdot 10^4$  кг/мм<sup>2</sup>;  $\mu=0,3$ .

$$\sigma_{12} = \frac{1 - 0,3^2}{2,1 \cdot 10^{-4} \cdot 3,14} = 0,138 \cdot 10^4 \text{ мм}^2/\text{кг}$$

Тогда

$$b = 4,164 \sqrt[3]{\frac{3 \pi P \cdot 0,276 \cdot 10^{-4}}{2 \left( \frac{4}{25,375} + \frac{1}{57,312} + \frac{1}{13,089} \right)}} = 0,454 \sqrt[3]{P},$$

$$a = \frac{0,3939}{4,164} 0,454 \sqrt[3]{P} = 0,0435 \sqrt[3]{P}.$$

Напряжение в центре площадки контакта определяется по формуле:

$$P_0 = \frac{3P}{2\pi ab} = 24,17 \sqrt[3]{P}.$$

Для расчета по формулам (94) и (96) необходимо сначала определить значения коэффициентов  $A$  и  $B$  в формуле (67). Считая площадку контакта малой по сравнению с размерами самих тел, аппроксимируем начальный зазор между контактирующими телами (как и в расчетах Герца) эллиптическим параболомом ( $n = 2$ ):

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= \left( \frac{1}{d_w} - \frac{1}{2z_x} \right) y^2 \\ z_1 - z_2 &= \left( \frac{1}{d_w} - \frac{1}{D_x} \right) x^2 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{d_w} + \frac{1}{D_x} = \frac{1}{25,375} + \frac{1}{114,624} = 0,04814 \text{ 1/мм};$$

$$B = \frac{1}{d_w} - \frac{1}{2z_x} = \frac{1}{25,375} - \frac{1}{2 \cdot 13,089} = 0,0012073 \text{ 1/мм},$$

а их отношение равно

$$\frac{B}{A} = \frac{0,001207}{0,04814} = 0,02508.$$

По табл.5 путем интерполяции при  $\frac{B}{A} = 0,02508$  и  $n = 2$

находим

$$\lambda = 1,6;$$

$$\sqrt{1-e^2} = 0,0958.$$

Тогда

$$b = 1.6 \left( \frac{P \cdot 0,276 \cdot 10^{-4}}{0,001207} \right)^{1/3} = 0,4541 \sqrt[3]{P};$$

$$\alpha = 0,0435 \sqrt[3]{P};$$

$$P_0 = \frac{3 \sqrt[3]{P}}{2\pi \cdot 0,4541 \cdot 0,0435} = 24,17 \sqrt[3]{P}.$$

На рис. 7 точками показаны экспериментальные значения больших полуосей и удвоенных малых полуосей эллипса контакта и средних напряжений по площадке контакта, а жирными линиями - их значения, вычисленные по формулам Герца и по формулам (94), (96) и (98).

Как видно, результаты расчета по предложенной методике при  $n = 2$  не отличаются от расчета по формуле Герца и дают хорошее совпадение с результатами эксперимента. На основании этого можно утверждать, что данная методика верна и позволяет производить расчет при выбранных значениях  $n$ .

Выполненные исследования позволяют сделать выводы относительно влияния геометрической формы контактирующих тел на размеры площадки контакта, сближение тел и контактные напряжения.

Формула (92) показывает, что чем больше  $n$ , тем жесткость локального контакта выше. На рис. 8 показана зависи-

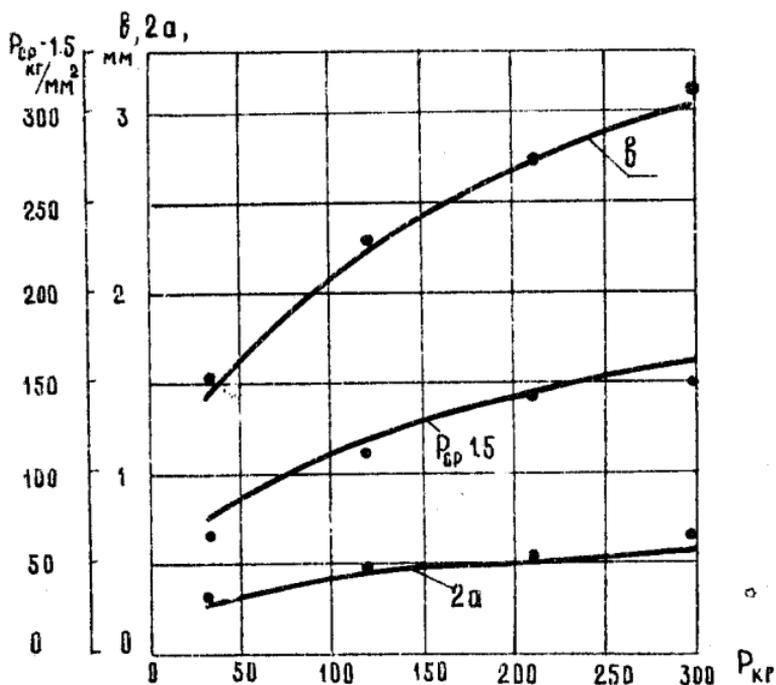


Рис.7. Кривые расчетных и опытных удвоенных полуосей ( $2a$  и  $2b$ ) контактных площадок при сжатии шара с желобом и средних напряжений по площадке контакта  $P_{ср}$ .

мость отношения сближения тел к сближению тел при  $n = \infty$  для различных значений  $n$  в уравнении (67). Из рисунка видно, что сближение тел с увеличением  $n$  сначала быстро уменьшается, а при  $n = 3$  это изменение ослабевает. Следовательно, для увеличения жесткости контакта упругих тел нужно использовать значения  $n$  от 3 и выше, и наоборот, с целью увеличения податливости контакта лучше использовать меньшие значения  $n$ . Малые значения  $n$  можно, например, использовать в радиально-упорных шарикоподшипниках. При нагреве таких подшип-

диалы осевые и радиальные зазоры, а также углы контакта между шариками и телобалами колец значительно уменьшаются, что может вызвать заклинивание шариков и выход подшипника из строя. Однако с уменьшением угла контакта возрастает нагрузка на шарик, и при малых значениях  $\alpha$  шарик будет иметь значительное сближение с желобом, частично компенсируя уменьшение зазоров в шарикоподшипнике и предотвращая тем самым его поломку.

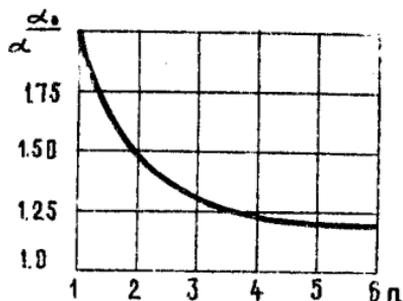


Рис. 8. Зависимость относительного сближения тел от показателя геометрической формы контактирующих тел.

Задача состоит лишь в том, чтобы создать профиль желоба, обеспечивающий начальное расстояние между ним и шариком, описываемое уравнением (67) с заданным  $n$ . Такие профили желоба вполне возможны и изготавливаются способами, предложенными в Саратовском политехническом институте, в ИМАШе, а также описываются в авторских свидетельствах № 59403, пл. 47Б, 12 от 8.Х-1939г. и № 320655 от 18.ХП-1971 г.

Наоборот, в точных зубчатых передачах, например, значение  $n$  желательно иметь по возможности большее, так как это уменьшит влияние переменной внешней нагрузки на точность передаваемых движений от одного колеса к другому.

Значительное влияние на жесткость локального контакта оказывает эксцентриситет эллипса контакта. Напомним, что под эксцентриситетом эллипса понимается отношение расстояния между допусками эллипса к его большой оси. Иначе

$$e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}$$

С увеличением эксцентриситета эллипса контакта  $e$  увеличивается значение полного эллиптического интеграла первого рода  $K(e)$ , входящего в формулу (92), и следовательно, увеличивается податливость локального контакта. С изменением  $e$  от нуля (что соответствует круговой площадке контакта) до 0,9962 (которое наиболее часто используется в подшипниках качения) величина  $K(e)$  изменяется от 1,57 до 3,83, что увеличивает податливость контакта почти в 2,5 раза. Таким образом, с целью увеличения жесткости локального контакта следует стремиться к малым значениям эллипса контакта и по возможности использовать круговые площадки соприкосновения тел.

Во многих случаях при контакте упругих тел большое значение имеют размеры пятна касания. Размеры пятна касания оказывают влияние на силы трения между контактирующими деталями, на условия проникновения в зону контакта смазки, на возможность отвода тепла из зоны нагружения и на многие другие условия работы деталей узлов механизмов и машин. Формула (96) показывает, что чем больше  $\Pi$ , тем меньше влияние внешней нагрузки  $P$  на размеры пятна касания. Следовательно, с увеличением  $\Pi$  жесткость локального контакта увеличивается, а размеры пятна касания уменьшаются, что создает возможность использования больших значений  $\Pi$  в наиболее ответственных передачах. При этом, с одной стороны, увеличивается точность передаваемых движений от одного звена механизма к другому, а с другой стороны - улучшаются условия смазки и охлаждения нагруженной части деталей машин, что уменьшает их износ и позволяет длительное время сох-

рвануть заданную точность. Большие значения  $n$  окажется полезным использовать в зубчатых передачах, подшипниках качения, кулачковых механизмах и во многих других случаях.

Формулы (104) и (108) показывают, что очень сложное и исключительно сильное влияние геометрическая форма контактирующих тел оказывает на величину и распределение контактных напряжений. На рис. 9 показано распределение относительных контактных напряжений  $P_{отн}$  (отношение величины напряжения к среднему контактному напряжению) вдоль оси зоны нагружения при различных  $n$ . Из рисунка видно, что с увеличением значения  $n$

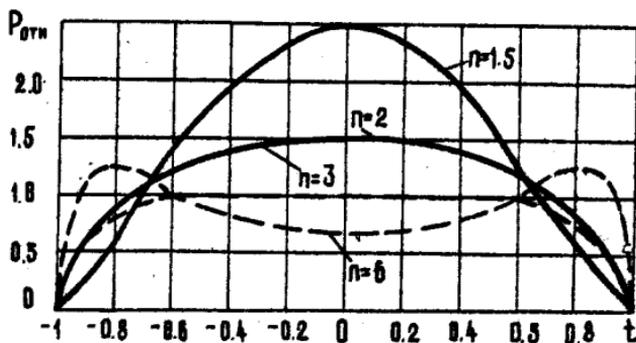


Рис. 9. Графики относительных напряжений вдоль оси контакта упругих тел.

величина напряжений в центре площадки контакта уменьшается. Это уменьшение наиболее интенсивно происходит до значения  $n = 3$ , а затем влияние формы контактирующих тел на величину напряжений в центре площадки контакта ослабевает.

При  $n < 3$  наибольшие контактные давления сосредотачиваются в центре пятна касания. Это обстоятельство, очевидно, окажется весьма полезным при конструировании опор вращения, так как при этом уменьшится момент трения вращения.

При  $n < 3$  наибольшие контактные напряжения сосредотачиваются ближе к периферии зоны нагружения.

Величина максимальных контактных напряжений уменьшается при увеличении  $n$  от 1 до 3. Как следует из формулы (104), при  $n = 1$  максимальное контактное напряжение равно бесконечности. При  $n = 3$  контактные напряжения распределяются вдоль площадки контакта равномерно. Это значение  $n$ , по всей вероятности, окажется наиболее оптимальным для деталей, работающих при циклических нагружениях. Известно, например, что долговечность подшипника качения зависит от величины максимальных контактных напряжений в 9-10-й степени. Так как при  $n = 3$  величина максимальных контактных давлений наименьшая, то создание профиля желоба, соответствующего этому значению  $n$ , будет способствовать значительному (в десятки раз) повышению работоспособности таких подшипников. То же самое можно сказать и о зубчатых передачах, опорах скольжения и прочих узлах механизмов и приборов.

При  $n > 3$  максимальное контактное напряжение с увеличением  $n$  вновь начинает увеличиваться. При  $n$ , стремящемся к бесконечности, получаются наибольшие контактные напряжения, которые сосредотачиваются в узком интервале вдоль границы зоны контактов, вызывая местное пластическое течение металла.

Итак, данная методика расчета позволит в каждом конкретном случае выбрать наиболее оптимальную геометрическую форму деталей машин и приборов, которая будет обеспечивать наиболее благоприятное распределение контактных напряжений, наиболее эффективные размеры площадки контакта и величину сближения контактирующих деталей, что в конечном счете дает возможность значительно увеличить долговечность, быстроходность, точ -

ность и надежность машин и приборов.

Следует отметить, что для обеспечения оптимальной геометрической формы деталей машин не обязательно придавать им параболическую форму. Надо использовать такую геометрическую форму, которая не вызвала бы технологических трудностей при изготовлении и которая с достаточной точностью позволила бы аппроксимировать реальный начальный зазор между телами уравнением параболы с заданным  $n$ . Выше было показано, что при соприкосновении тел, профиль которых в главных сечениях представляет собой дугу окружности, начальный зазор хорошо аппроксимируется параболой ( $n=2$ ). При очень близком контакте, например при сжатии шара с узким желобом, для увеличения точности расчета можно использовать дробное значение  $n$  больше двух.

Таким же образом следует поступать и в других случаях.

Полученные выше формулы справедливы при одинаковом значении  $n$  в обеих координатных плоскостях декартовой системы координат. На практике же чаще всего значения  $n$  в главных сечениях различны. Это более сложный случай контакта и требует специального рассмотрения.

### §5. Общий случай сжатия упругих тел

В этом параграфе мы рассматриваем случай сжатия упругих тел, имеющих эллиптическую площадку контакта, когда начальное расстояние между телами в главных сечениях аппроксимируется уравнением

$$\left. \begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= A x^m \\ Z_1 - Z_2 &= B y^n \end{aligned} \right\}, \quad (110)$$

где  $Z_1 - Z_2$  - расстояние между контактирующими в начальный момент касания;

$A$  и  $B$  - постоянные коэффициенты;

$m$  и  $n$  - показатели степени - любые числа больше нуля.

Значения  $x$  и  $y$  берутся по модулю. Возьмем прямоугольную систему координат (рис. I) и расположим её так же, как и в предыдущем случае: начало координат - в точке начального касания, ось  $OZ$  - по нормали к сжимаемым поверхностям, плоскости  $ZOX$  и  $ZOY$  - в плоскости главных сечений тел.

Уравнение площадки контакта

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где  $a$  и  $b$  - соответственно малая и большая полуоси эллипса.

Используя зависимость для сближения жесткого плоского эллиптического в плане штампа с упругим полупространством и на основании уравнения (6) можно определить сближение тел:

$$\alpha_0 = (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP}{b^3} K(e_t). \quad (III)$$

Здесь  $K(e_t)$  - переменная величина, т.е. эксцентриситет эллипса, контакта, очевидно, будет меняться при изменении внешней нагрузки.

По аналогии с выражениями (58) и (64) определим упругие перемещения точек соприкасающихся тел по краям площадки контакта, в главных сечениях:

$$\begin{aligned} \alpha_a &= (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP'}{b^3} F(e_t, \psi_a), \\ \alpha_b &= (v_1 + v_2) \int_0^P \frac{dP'}{b^3} [K(e_t) - F'(e_t, 90^\circ - \psi_b)]. \end{aligned} \quad (II2)$$

В выражении (87)

$$\Psi_a = \alpha z \operatorname{ctg} \frac{\beta'}{a \sqrt{1 - \frac{\alpha'^2}{a^2}}};$$

$$\Psi_b = \alpha z \operatorname{ctg} \frac{\alpha'}{b \sqrt{1 - \frac{\beta'^2}{b^2}}}. \quad (\text{II3})$$

Обозначим

$$\frac{\beta'}{b} = t. \quad (\text{II4})$$

Предположим, что

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{\beta'}{b}\right)^q = \left(\frac{\alpha'}{a}\right)^q = t^q, \quad (\text{II5})$$

где  $P'$  - текущее значение внешней нагрузки, соответствующее полуоси эллипса контакта  $\beta'$ ;

$P$  - значение внешней нагрузки, соответствующей размеру большой полуоси эллипса контакта  $b$ .

Из выражения (II5):

$$\frac{\alpha'}{a} = t^{\frac{q}{q}}$$

Используя соотношение

$$a = b \sqrt{1 - e^2}, \quad (\text{II6})$$

определим

$$\frac{\alpha'}{b} = \frac{\alpha' \sqrt{1 - e^2}}{a} = t^{\frac{q}{q}} \sqrt{1 - e^2};$$

$$\frac{\beta'}{a} = \frac{\beta'}{b \sqrt{1 - e^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (\text{II7})$$

На основании (II4), (II5), (II6) и (II7) можно выразить упругие перемещения тел в центре  $\alpha_0$  и по краям площадки контакта  $\alpha_a$  и  $\alpha_b$  через  $t$ . Для этого сначала опреде-

лим

$$dP' = p \cdot g \cdot t^{q-1} dt.$$

Тогда

$$\alpha_0 = \frac{P(v_1 + v_2)g}{\beta} \int_0^1 t^{q-2} K(e_t) dt ;$$

$$\alpha_a = \frac{P(v_1 + v_2)g}{\beta} \int_1^t t^{q-2} F(e_t) dt ;$$

$$\alpha_\beta = \frac{P(v_1 + v_2)g}{\beta} \int_0^1 t^{q-2} [K(e_t) - F(e_t; 90^\circ - \psi_\beta)] dt . \quad (II8)$$

В формулах (II8) углы  $\psi_a$  и  $\psi_\beta$  также выражаются через  $t$  :

$$\psi_a = \alpha z c \operatorname{tg} \frac{t}{\sqrt{1-e^2} \sqrt{1-t^2}} ;$$

$$\psi_\beta = \alpha z c \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-e^2} t^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{1-t^2}} , \quad (II9)$$

$e_t$  - текущее значение эксцентриситета эллипса контакта. Найдем это значение  $e_t$ . Из выражения (II5):

$$\frac{\alpha^e}{\beta^q} = \frac{x^e}{y^q} , \text{ или } \beta^{e-q} \sqrt{(1-e^2)^e} = y^{e-q} \sqrt{(1-e_t^2)^e} .$$

Отсюда

$$\sqrt{(1-e_t^2)^e} = \sqrt{(1-e^2)^e} \frac{\beta^{e-q}}{y^{e-q}} = \sqrt{(1-e^2)^e} t^{q-e} .$$

Окончательно определим

$$e_t = \sqrt{1 - (1-e^2) t^{\frac{2(q-e)}{e}}} . \quad (I20)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^1 t^{q-2} K(e_t) dt ; \\ J_a &= \int_0^1 t^{q-2} F(e_t; \psi_a) dt ; \\ J_\beta &= \int_0^1 t^{q-2} F(e_t; 90^\circ - \psi_\beta) dt . \end{aligned} \quad (I21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{P(v_1 + v_2) q}{\beta} J_0 ; \\ \alpha_a &= \frac{P(v_1 + v_2) q}{\beta} J_a ; \\ \alpha_\beta &= \frac{P(v_1 + v_2) q}{\beta} (J_0 - J_\beta) . \end{aligned} \quad (I22)$$

На основании (6) получим:

$$\begin{aligned} A a^m &= \alpha_0 - \alpha_a = \frac{P(v_1 + v_2) q}{\beta} (J_0 - J_a) ; \\ B \beta^n &= \alpha_0 - \alpha_\beta = \frac{P(v_1 + v_2) q}{\beta} J_\beta . \end{aligned} \quad (I23)$$

Отсюда

$$\beta = \left[ \frac{P(v_1 + v_2) q J_\beta}{B} \right]^{\frac{1}{n+1}} ; \quad (I24)$$

$$\frac{B \beta^n}{A a^m} = \frac{J_\beta}{J_0 - J_a} \quad \text{или} \quad \frac{B}{A} = \frac{J_\beta \sqrt{(1-e^2)}^{m+1} \beta^{m-n}}{J_0 - J_a} \quad (I25)$$

Подставляя значение  $\beta^*$  из уравнения (I24) в выражение (I25), определим

$$\frac{B}{A} = \frac{J_\beta \sqrt{(1-e^2)}^m}{J_0 - J_a} \left[ \frac{P(v_1 + v_2) q J_\beta}{B} \right]^{\frac{m-n}{n+1}} = \frac{J_\beta^{\frac{m-n}{n+1}} \sqrt{(1-e^2)}^{m+1}}{J_0 - J_a} \left[ \frac{P(v_1 + v_2) q}{B} \right]^{\frac{m-n}{n+1}} \quad (I26)$$

Переносим известные члены выражения (I26) в левую часть, а неизвестные - в правую, найдем:

$$\frac{B}{A} \frac{m+1}{n+1} [P(v_1+v_2)q] \frac{n-m}{n+1} = \frac{J_6^{\frac{m+1}{n+1}} \sqrt{(1-e^2)^m}}{J_0 - J_a} \quad (I27)$$

Найдем выражение для определения размера малой полуоси эллипса контакта. Из уравнения (I23) имеем:

$$a = \left[ \frac{P(v_1+v_2)q}{A \cdot b} (J_0 - J_a) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (I28)$$

Подставляя в (I28) значение  $b$  из (I24), определим

$$a = \left\{ \frac{P(v_1+v_2)q (J_0 - J_a) B^{\frac{1}{n+1}}}{A [P(v_1+v_2)q J_6]^{\frac{1}{n+1}}} \right\}^{\frac{1}{m}} = \left[ \frac{P(v_1+v_2)q (J_0 - J_a)^{\frac{n+1}{n}} B^{\frac{1}{n}}}{A^{\frac{n+1}{n}} J_6^{\frac{1}{n}}} \right]^{\frac{1}{m(n+1)}} \quad (I29)$$

Сравнивая выражения (I24), (I29) и (I15), найдем

$$l = q \frac{m}{n} \quad (I30)$$

В уравнениях (I24) и (I27) величина  $J_6$  - переменная, зависящая от внешней нагрузки. Поэтому

$$q \neq n+1.$$

Значение  $q$  найдем из выражения для определения контактных напряжений. По аналогии с (86) при  $n < 3$

$$P(x, y) = P_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)} - \frac{3-m}{2(m-1)}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-m}{2(m-1)}} \quad (I31)$$

Тогда

$$P = \int_F P(x, y) dF = 4 P_0 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)} - \frac{3-m}{2(m-1)}} dy \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-m}{2(m-1)}} dx \quad (I32)$$

Обозначим

$$\frac{x^2}{a^2(1-\frac{y^2}{b^2})} = k ;$$

Тогда  $\frac{y^2}{b^2} = u$ .

$$dx = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \frac{dk}{2\sqrt{k}} ;$$

$$dy = b \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

Выражая интеграл (I32) через  $u$  и  $k$ , найдем

$$\int_0^b (1-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3-n}{2(n-1)}-\frac{3-m}{2(m-1)}} dy \int_0^{\sigma(y)} (1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})^{\frac{3-m}{2(m-1)}} dx =$$

$$= \frac{a \cdot b}{4} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}-\frac{1}{2}} du \int_0^1 k^{\frac{1}{2}} (1-k)^{\frac{3-m}{2(m-1)}} dk =$$

$$= \frac{\pi a b}{4} \frac{\Gamma[\frac{m+1}{2(m-1)}] \Gamma[\frac{n}{n+1}]}{\Gamma(\frac{m}{m+1}) \Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}$$

(I32)

Таким образом,

$$P = \pi a b P_0 \frac{\Gamma[\frac{m+1}{2(m-1)}] \Gamma(\frac{n}{n-1})}{\Gamma(\frac{m}{m-1}) \Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}$$

(I34)

Здесь  $\Gamma(x)$  - гамма функция, которая находится по специальным таблицам в зависимости от  $x$ .

С другой стороны, согласно выражениям (8) и (58),

$$P_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^P \frac{dP'}{a \cdot b'}$$

Выражая этот интеграл через переменную  $t$  на основании (II5), (II6) и (II7), определим

$$e_2 = \frac{P \cdot q}{2\pi a b} \int_0^1 t^{q-2-\frac{n}{m}} dt = \frac{P \cdot q}{2\pi a b (q-1-\frac{n}{m})} \quad (I35)$$

Сравнивая (I34) и (I35), найдем

$$q = \frac{1 + \frac{n}{m}}{1 - \frac{\Gamma[\frac{m+1}{2}] \Gamma[\frac{n}{n-1}]}{2 \Gamma(\frac{m}{m-1}) \Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}} \quad (I36)$$

Практически соотношение (I36) будет справедливо при  $1 \leq n \leq 3$ . Пользуясь изложенной выше методикой, при необходимости нетрудно найти значения  $q$  и при других значениях  $m$  и  $n$ .

В табл.6 даны значения  $q$ , подсчитанные по формуле (I36) в зависимости от значений  $m$  и  $n$ . Как видно, значения  $q$  очень мало (на 3+ 5%) отличаются от значения  $n + 1$ . Это указывает на очень слабую зависимость значения интеграла

Таблица 6

Значения  $q$  в зависимости от значений  $m, n(n+1)$

m	2				3			
	2,5	3	3,5	4	2,5	3	3,5	4
n+1	2,5	3	3,5	4	2,5	3	3,5	4
q	2,3864	3,0	3,5723	4,1166				

$e_2$  от внешней нагрузки  $P$ , следовательно, от переменной величины эксцентриситета эллипса контакта. Поэтому на практике во многих случаях можно принять  $q = n + 1$ , а величину  $e_2$  в выражениях (98) постоянной, что значительно упрощает расчет.

При этом, например,

$$\alpha_0 = \frac{P(v_1 + v_2)(n+1)}{n \cdot \beta} K(e)$$

Для более точных расчетов необходимо вычислить значения интегралов (I2I) с учетом переменной величины  $e_t$ , определяемой выражением (I20). Эти интегралы не сложно рассчитать для частных значений  $e, n$  и  $m$ . В табл. 7 даны значения  $J_0, J_\alpha, J_\beta$  для наиболее употребительных случаев, когда  $m=2$ , а  $n = 1,5 \div 3$ .

Зная  $J_0, J_\alpha$  и  $J_\beta$ , не сложно найти значение правой части выражения (I27). Правая и левая части (I27) тождественно равны.

Обозначим

$$C = \frac{B^{\frac{m+1}{n+1}}}{A} [P(v_1 + v_2) \cdot q]^{\frac{n-m}{n+1}} = \frac{J_\beta^{\frac{m+1}{n+1}} \sqrt{(1-e^2)^m}}{J_0 - J_\alpha} \quad (I37)$$

Таблица 7

Значения интегралов  $J_0, J_\beta$  и  $J_\alpha$  при  $m = 2$   
и различных  $n$

$e$	$J_0$	$J_\beta$	$J_\alpha$
$n = 1,5$			
0	1,2392	0,6598	0,5150
0,1736	1,2314	0,6624	0,5179
0,3420	1,2136	0,6698	0,5311
0,5000	1,2065	0,6834	0,5609
0,6428	1,2311	0,7148	0,6116
0,7660	1,3055	0,7801	0,6906
0,8660	1,4466	0,9032	0,8140
0,9397	1,6878	1,1226	1,0206
0,9659	1,8742	1,2978	1,1850
0,9848	2,1489	1,5617	1,4362
0,9962	2,6353	2,0391	1,8981

---

e : J<sub>0</sub> : J<sub>1</sub> : J<sub>2</sub>

---

n = 2

0	0,7854	0,3926	0,3927
0,1736	0,7914	0,3972	0,3972
0,3420	0,8100	0,4113	0,4113
0,5000	0,8428	0,4366	0,4366
0,6428	0,8934	0,4764	0,4764
0,7660	0,9678	0,5369	0,5369
0,8660	1,0782	0,6303	0,6303
0,9397	1,2523	0,7849	0,7849
0,9659	1,3840	0,9066	0,9066
0,9848	1,5767	1,0895	1,0895
0,9962	1,9159	1,4203	1,4203

n = 3

0	0,5459	0,2471	0,2797
0,1736	0,5499	0,2499	0,2829
0,3420	0,5623	0,2586	0,2928
0,5000	0,5841	0,2744	0,3105
0,6428	0,6175	0,2991	0,3382
0,7660	0,6665	0,3368	0,3802
0,8660	0,7389	0,3953	0,4445
0,9397	0,8523	0,4924	0,5495
0,9659	0,9378	0,5691	0,6310
0,9848	1,0622	0,6850	0,7521
0,9962	1,2806	0,8959	0,9680

Таблица 8

Значения  $e, \sqrt{1-e^2}$  и коэффициента  $\lambda$ при  $m = 2$  и различных  $n$ .

$e$	$\lambda$	$e$	$\sqrt{1-e^2}$
$n = 1,5$			
0,8382	I,1992	0	I
0,8291	I,2011	0,1756	0,9848
0,8000	I,2066	0,3420	0,9397
0,7356	I,2162	0,5000	0,8660
0,6331	I,2383	0,6428	0,7660
0,4988	I,2824	0,7660	0,6428
0,3497	I,3598	0,8660	0,5000
0,2014	I,4833	0,9397	0,3420
0,1329	I,5719	0,9659	0,2588
0,0722	I,6928	0,9848	0,1736
0,0242	I,8833	0,9962	0,0872
$n = 2$			
I,0000	I,0562	0	I,0000
0,9773	I,0602	0,1756	0,9848
0,9109	I,0726	0,3420	0,9397
0,8059	I,0941	0,5000	0,8660
0,6703	I,1263	0,6428	0,7660
0,5147	I,1722	0,7660	0,6428
0,3518	I,2366	0,8660	0,5000
0,1964	I,3304	0,9397	0,3420
0,1272	I,3959	0,9659	0,2588
0,0674	I,4841	0,9848	0,1736
0,02177	I,6212	0,9962	0,0872
$n = 3$			
I,3164	I,0004	0	I,0000
I,2836	I,0069	0,1756	0,9848
I,1883	I,0156	0,3420	0,9397
I,0391	I,0308	0,5000	0,8660

$\epsilon$	$\lambda$	$e$	$\sqrt{1-e^2}$
0,8499	1,0533	0,6428	0,7660
0,6380	1,0850	0,7660	0,6428
0,4232	1,1293	0,8660	0,5000
0,2270	1,1980	0,9397	0,3420
0,1431	1,2370	0,9659	0,2588
0,07321	1,2957	0,9848	0,1736
0,022 38	1,3856	0,9962	0,0872

Подсчитав значение  $C$  для различных  $n, m$  и  $e$  и сведя их в таблицу или построив график, несложно затем по заданным  $C, n, m$  найти значение эксцентриситета эллипса контакта.

Для удобства расчета формулу (124) удобнее записать так:

$$\epsilon = \lambda \left[ \frac{P(v_1 + v_2)}{B} \right]^{\frac{1}{n+1}}, \quad (138)$$

где

$$\lambda = (g \cdot J_0)^{\frac{1}{n+1}} \quad (139)$$

Значение  $e, \sqrt{1-e^2}$  и коэффициента  $\lambda$  при  $n=2$  и различных  $C$  и  $n$  даны в табл.8. Практически в процессе расчета удобнее пользоваться графиками. С этой целью на рис. 10 дана зависимость коэффициента  $\lambda$ , а на рис. 11 - зависимость  $\alpha (e = \sin \alpha)$  от коэффициента  $C$  при различных значениях  $n$ .

#### Порядок расчета

На основе исходных значений  $m, n, B, A, v_1, v_2; P$  по формуле (136) или по табл. 6 определяется значение  $g$ , а затем находится коэффициент  $C$ :

$$C = \frac{B^{\frac{m+1}{n+1}}}{A} \left[ P(v_1 + v_2) g \right]^{\frac{n-m}{n+1}}.$$

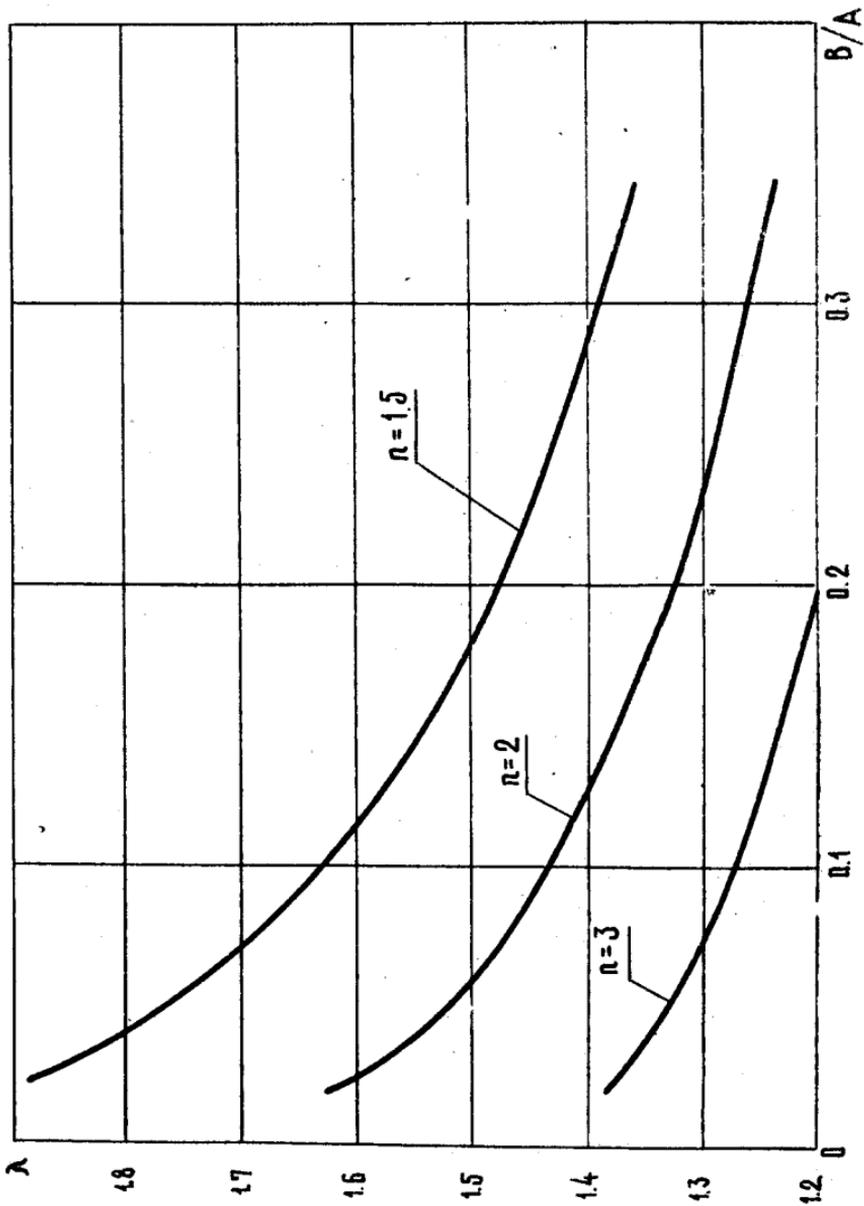


Рис. 10. График зависимости коэффициента  $\lambda$  от  $B/A$ .

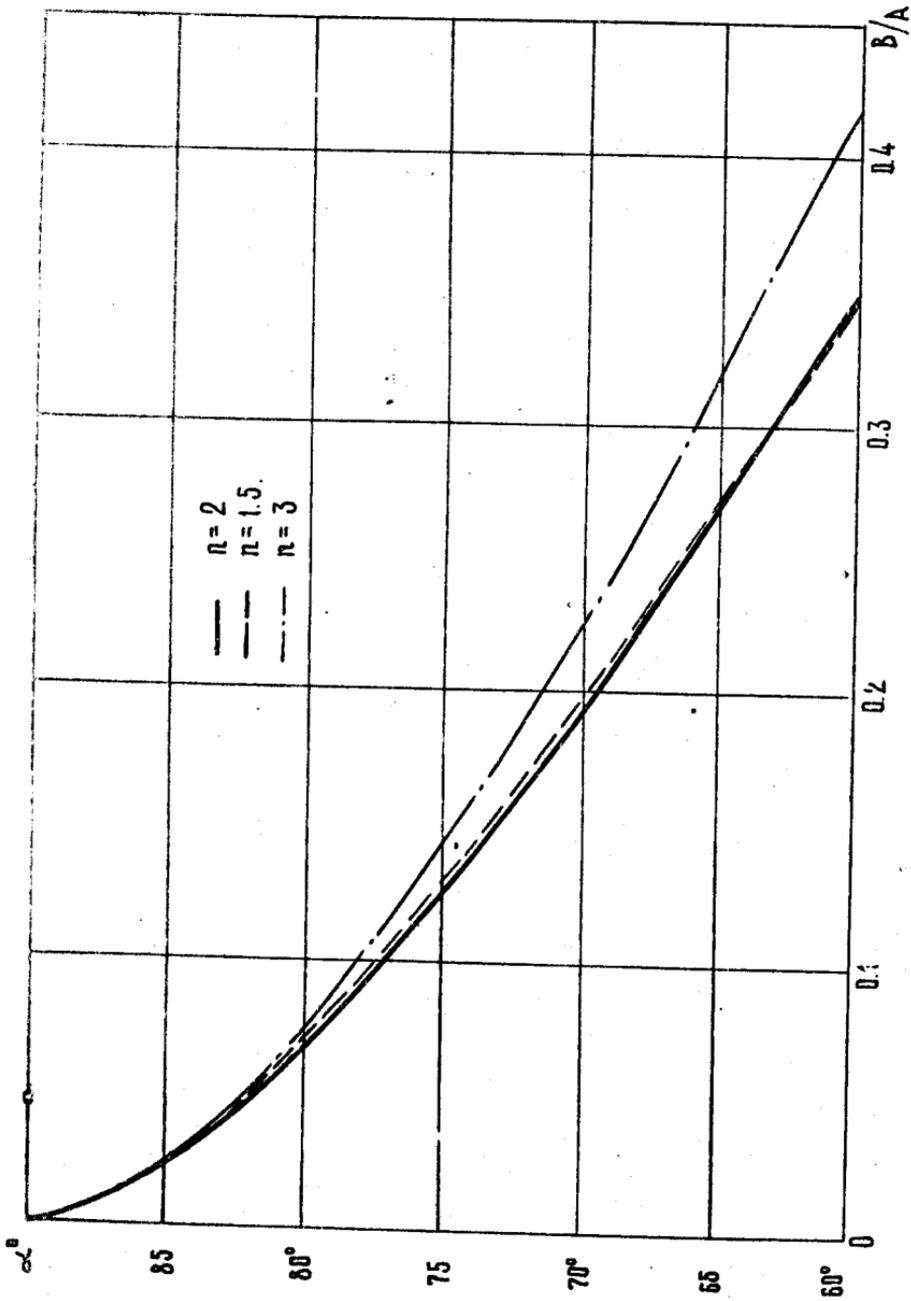


Рис 11. График зависимости  $\alpha$  ( $e = \sin \alpha; \sqrt{1-e^2} = \cos \alpha$ ) от  $C$ .

После этого по табл. 8 или рис. 10 и 11 определяется значение коэффициента  $\lambda$  и угол  $\alpha$  ( $\sqrt{1-e^2} = \cos \alpha$ ), а по формулам (138) и (116) находятся величины большой и малой полуоси эллипса контакта.

По табл. 7 определяется величина  $J_0$  и по формуле (122) находится сближение упругих тел  $\alpha_0$ .

Напряжение в центре площадки контакта определяется уравнением (135), а распределение контактных напряжений по площадке контакта формулой (131). Этим самым полностью решается контактная задача в случае сжатия тел произвольной конфигурации, имеющих радиальную симметрию.

При необходимости данную методику расчета можно использовать при различных значениях  $n$  и  $m$ . Однако на практике чаще всего имеет место случай, когда  $m = 2$ . Практически  $m = 2$ , например, в подшипниках качения, так как в плоскости перемещения тел качения контактирующие тела представляют собой окружности, начальное расстояние между которыми хорошо аппроксимируется параболической зависимостью.

При  $m = 2$  эпюр контактных напряжений в направлении малой оси эллипса контакта имеет форму полуэллипсоида, а в направлении большой полуоси - форму, соответствующую данному значению  $n$ . Максимальные контактные напряжения в этом случае уже менее, чем при одинаковом  $n$  в главных сечениях, но все же довольно значительно зависят от значения  $n$  (см. предыдущий параграф). Из рис. 12 видно, что при  $m = 2$  отношение максимальных контактных напряжений  $K$  средним с увеличением  $n$  в два раза уменьшается почти в полтора раза. Это обстоятельство является

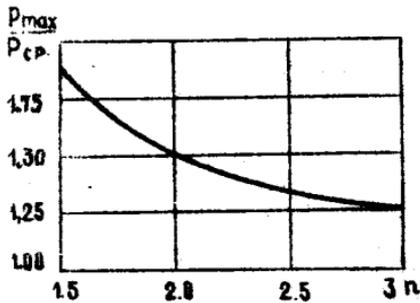


Рис. 12. График зависимости относительных максимальных контактных напряжений от значения  $n$ .

весьма важным с точки зрения увеличения работоспособности подшипников качения.

Вобщем создание конструкций подшипников качения, у которых начальное расстояние между шариками и желобом в поперечном сечении желоба описывалось бы параболической зависимостью с оптимальным значением  $n$ , является большим резервом повыше-

ния их долговечности, быстроходности, работоспособности и надежности. Тем более, что изготовление таких подшипников не вызывает особых технологических трудностей. Оптимальное же значение  $n$  нужно выбирать исходя из конкретных требований, предъявляемых к подшипнику качения.

К универсальному радиальному шарикоподшипнику, например, предъявляются такие требования, чтобы он удовлетворительно работал в широком диапазоне скоростей и нагрузок. Причем, как правило, сильно нагруженные подшипники качения работают с малыми числами оборотов, а наименее нагруженные подшипники имеют большие числа оборотов. В этом случае наиболее оптимальным окажется значение  $n < 2$ .

На рис. 13 показано, например, изменение величины максимальных контактных напряжений  $P_{\text{max}}$  и размера большой полуоси эллипса контакта шарика с желобом шарикоподшипника № 206 в зависимости от внешней нагрузки на шарик при различных значениях  $n$ . Значение  $n = 2$  соответствует обычной конструк-

ции подшипника качения. По величине  $\delta$  можно примерно судить о величине сил трения в подшипнике качения, так как известно, что с уменьшением развала желоба размер площадки контакта в поперечном сечении желоба увеличивается, а момент трения качения значительно возрастает, и наоборот, для снижения потерь на трение в высокоскоростных шарикоподшипниках развал желоба увеличивают.

Величины  $P_{\max}$  и  $\delta$  определялись по формулам (135) и (138). При этом значения коэффициента  $A$  в формуле (110) сохранялось одинаковым при различных  $n$ , а коэффициент  $B$  подбирался таким образом, чтобы величина  $P_{\max}$  при внешней нагрузке, равной 100 кг, во всех случаях была одинаковой. Подбирая различные величины коэффициента  $B$ , можно было бы изменять положение кривых по вертикали, а используя промежуточные значения  $n$ , можно регулировать наклон этих кривых.

Из рис. 13 видно, что при  $n=1,5$  максимальные контактные напряжения при малых внешних нагрузках имеют большее, а при больших нагрузках - меньшее значение, чем в обычной конструкции подшипника качения (при  $n=2$ ). Наоборот, размеры площадки контакта ( $\delta$ ) получаются меньшими при малых нагрузках и большими при больших нагрузках. В обычной конструкции подшипника качения контактное давление изменяется более резко, чем размеры площадки контакта.

Следовательно, можно сделать вывод, что коэффициент работоспособности подшипника качения при  $n < 2$  можно увеличить. При малых нагрузках такому подшипнику можно будет давать большие числа оборотов, а при низких скоростях вращения - значительно большие нагрузки. Это же обстоятельство позволит исполь-

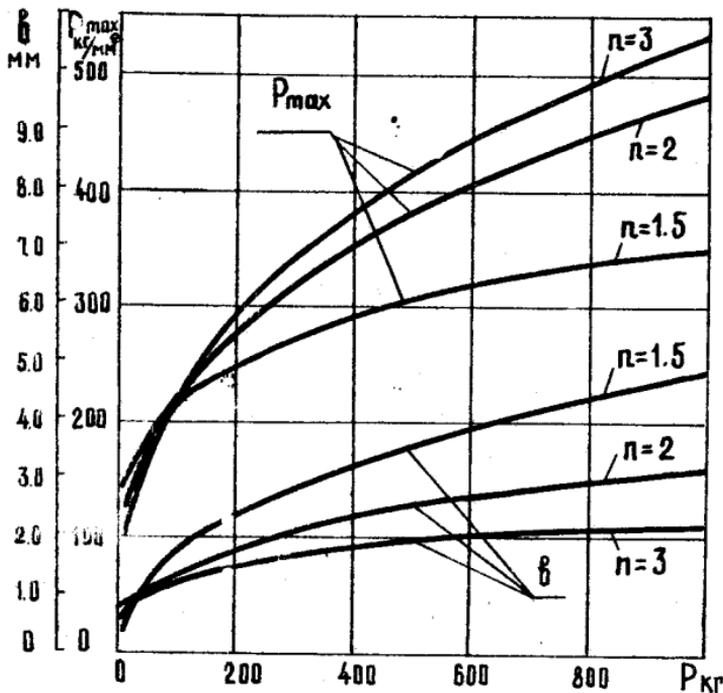


Рис. 13. График зависимости максимальных контактных напряжений  $P_{max}$  и размера большой полуоси эллипса контакта  $b$  от внешней нагрузки  $P$ .

зовать при больших нагрузках подшипники меньших размеров, что сэкономит материал и даст возможность уменьшить габариты узлов механизмов и машин.

При  $n = 3$  размер площадки контакта изменяется очень незначительно в широком диапазоне изменения внешних нагрузок. При увеличении нагрузки от 200 кг до 1000 кг ( в 5 раз) размер  $b$  увеличивается всего в 1,4 раза. При этом контактные напряжения не намного отличаются от напряжений в обычной конструкции шарикоподшипника, что в общем позволит использовать это значение  $n$  для подшипников, работающих в тяжелых ус-

ловиях при недостаточном количестве смазки и высокой температуре окружающей среды.

Таким образом, тороидальная форма желоба не является совершенной с точки зрения работоспособности шарикоподшипника. Поэтому в настоящее время уже созданы и исследуются ( в ИМАШе, ВНИИПе, в Саратовском политехническом институте ) шарикоподшипники со сложным профилем желоба. Предложенная методика расчета сжатия упругих тел позволяет упростить эти исследования и дает возможность определить оптимальные параметры профиля таких желобов.

#### § 6. Сжатие шероховатых упругих тел

В предыдущих разделах мы рассматривали вопросы сжатия упругих тел, имеющих абсолютно гладкую поверхность. В действительности все тела шероховаты, в результате чего размеры площадок контакта, сближения тел и контактные напряжения могут значительно отличаться от расчетных для гладких тел. Поэтому вопрос о влиянии шероховатости поверхности при сжатии упругих тел представляет большой практический интерес. Особенно интересно проследить за влиянием шероховатости при различной форме контактирующих тел.

Пусть два упругих тела сжимаются силой, проходящей через их общую ось симметрии. Как было показано в § I, под воздействием давления на контакте точки на наружной поверхности тел получают перемещения в направлении действия силы, которые связаны между собой уравнением (8):

$$Z_1 - Z_2 = \alpha_0 - \alpha_1(x, y) + \alpha_2(x, y).$$

При контактировании шероховатых тел, помимо общей упругой деформации наружной поверхности, под действием контактных напряжений произойдет упругая или пластическая деформация микронеровностей этих тел. Пластическая деформация микронеровностей преобладает при контактировании металлических поверхностей грубой и средней чистоты обработки, упругая - при сжатии поверхностей с высоким классом чистоты и при многократном деформировании.

В результате деформации микронеровностей все точки тела получают дополнительное перемещение, так что уравнение (8) можно переписать следующим образом:

$$Z_1 - Z_2 = \alpha_0 + \alpha_{0m} - \alpha_1(x, y) - \alpha_{1m} + \alpha_2(x, y) + \alpha_{2m}, \quad (140)$$

где  $\alpha_{0m}$  и  $\alpha_{2m}$  - деформация микронеровностей в центре и в текущей точке контакта.

Величина деформации микронеровностей зависит от их формы и распределения вершинок по высоте. По форме микронеровности напоминают сегменты эллипсоидов. Однако для упрощения расчетов многие авторы заменяют их эквивалентными шаровыми сегментами. В качестве эквивалентного радиуса шарового сегмента обычно принимают среднее значение радиуса для продольной и поперечной шероховатости.

Закон распределения микронеровностей по высоте обычно задается степенной функцией. Тогда сближение микронеровностей  $\epsilon$  равно:

при упругом контакте [24]

$$\epsilon = \left[ \frac{0,75 \pi^2 \sigma^2 \nu P_c}{K_1 \psi (\psi - 1) d} \right]^{\frac{1}{2\psi + 1}} \cdot H_{\max}^{\frac{2\psi}{2\psi + 1}}, \quad (141)$$

при пластическом контакте [ II ]

$$\varepsilon = \left( \frac{P_c}{\alpha \cdot C \sigma_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot H_{\max} \quad (I42)$$

при повторном приложении нагрузки, когда микронеровности пластически деформировались при первом приложении нагрузки [ II ],

$$\varepsilon = j \left( \frac{P_c}{\alpha \cdot C \sigma_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot H_{\max} \quad (I43)$$

В выражениях (I41), (I42) и (I43)

$P_c$  - контурное давление на контакте;

$\alpha$  и  $\gamma$  - коэффициенты опорной кривой шероховатой поверхности;

$H_{\max}$  - максимальная высота микронеровностей;

$r$  - средний радиус закругления вершин микронеровностей;

$\nu$  - величина, характеризующая упругие свойства материала,

$$\nu = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} ;$$

$\sigma_s$  - предел текучести наклепанного материала;

$C$  - коэффициент, зависящий от формы выступов,

$$C \sigma_s = HB ;$$

$HB$  - твердость по Бринелю;

$K_1$  - коэффициент, зависящий от  $\gamma$  (при  $\gamma=2 - K_1 = 0,4$ ;  
при  $\gamma=3 - K_1 = 0,12$ );

$$j = \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right)$$

$\alpha$  - коэффициент, учитывающий упругую осадку и расплывание выступов (при пластическом контакте  $\alpha \approx 1$ ,  
при упругом  $\alpha \approx 0,5$ , в общем случае  $0,5 \leq \alpha \leq 1$ ).

Формулы (I41), (I42) и (I43) справедливы при контактировании шероховатой поверхности с гладкой абсолютно твердой поверхностью. При контактировании двух шероховатых поверхностей

необходимо учитывать вероятность встречи отдельных выступов.

В этом случае [24]

$$H_{\max} = H_{1\max} + H_{2\max} ;$$

$$v = v_1 + v_2 ;$$

$$y = y_1 + y_2 ;$$

$$\alpha = \frac{K_2 d_1 d_2 (H_{1\max} + H_{2\max})^{y_1 + y_2}}{H_{1\max}^{y_1} \cdot H_{2\max}^{y_2}} ;$$

$$\beta = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \quad (I44)$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй из контактирующих поверхностей. Значения коэффициента  $K_2$  даны в табл. 8.

Если поверхности имеют одинаковую шероховатость, то формулы (I44) упрощаются:

$$H_{\max} = 2 H_{1,2\max} ; v = 2 v_{1,2} ;$$

$$y = 2 y_{1,2} ; z = 0.5 z_{1,2} ;$$

$$\alpha = 2^{2y_{1,2}} \alpha_{1,2}^2 \cdot K_2 .$$

Таблица 8

Значения коэффициента  $K_2$

$y_1 \backslash y_2$	I	2	3
I	0,50	0,33	0,25
2	0,33	0,16	0,10
3	0,25	0,10	0,05

Как видно из уравнений (I41), (I42) и (I43), величина деформации микронеровностей зависит от давления на контакте. Так как давление распределено внутри площадки контакта, то деформация микровыступов на границе площадки будет равна нулю. Для граничной точки площадки контакта, находящейся в главных сечениях, выражение (I40) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= \alpha_0 + \alpha_{om} - \alpha_b \\ z_1 - z_2 &= \alpha_0 + \alpha_{om} - \alpha_a \end{aligned} \right\} \quad (I45)$$

Таким образом, влияние шероховатости контактирующих тел сводится к увеличению их сближению на величину деформации микровыступов в центре контакта. Если начальное расстояние между контактирующими телами в главных сечениях задано уравнением

$$\left. \begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= Ax^m \\ Z_1 - Z_2 &= By^n \end{aligned} \right\},$$

а площадка контакта представляет собой эллипс, то  $\alpha_o, \alpha_a$  и  $\alpha_\beta$  определяются выражением (II8). Подставив их значения в (I45), получим

$$\begin{aligned} A \cdot a^m &= \frac{P(u_1 + u_2)g}{\beta} (\gamma_o - \gamma_a) + \alpha_{om}; \\ B \cdot b^n &= \frac{P(u_1 + u_2)}{\beta} \gamma_\beta + \alpha_{om}. \end{aligned} \quad (I46)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta &= \left[ \frac{P(u_1 + u_2)g}{\beta} \gamma_\beta + \frac{\alpha_{om}\beta}{\beta} \right]^{\frac{1}{n+1}} = \left( \beta_2 + \frac{\alpha_{om}\beta}{\beta} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \\ \frac{\beta^{n+1}}{A} &= \frac{(1-\epsilon^2)^m P(u_1 + u_2)g (\gamma_o - \gamma_a) + \alpha_{om}\beta}{\left[ \frac{P(u_1 + u_2)g}{\beta} \gamma_\beta + \alpha_{om}\beta \right]^{\frac{n-m}{n+1}}}. \end{aligned} \quad (I47)$$

Здесь  $\beta_2$  - большая полуось эллипса контакта, рассчитанная без учета шероховатости.

Выражения (I47) очень неудобны в использовании. Практически можно воспользоваться следующей методикой расчета контакта шероховатых тел.

Обычным образом по табл. 8 определяется эксцентриситет эллипса контакта и значение коэффициента  $\gamma$ . По формулам (II6) и (II2) подсчитывается  $P_o, \beta_2$  и  $a_2$ , а по формулам (II7), (II8) и (II9) находится значение сближения шероховатых поверхностей  $\alpha_{om}$  в центре площадки контакта при  $P_c = P_o$ .

При этом считается, что вершинки неровностей расположены в области контакта с постоянной плотностью.

Затем, полагая, что размер полуосей эллипса контакта при контактировании шероховатых поверхностей сравнительно мало отличается от  $\beta_2$ , определяется размер большой полуоси эллипса контакта:

$$\beta = \left( \beta_2^{n+1} + \frac{\alpha_{\text{ов}}}{\beta} \beta_2 \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (I48)$$

Далее, считая, что эксцентриситет эллипса контакта не изменяется, находится размер малой полуоси эллипса контакта и уточняется значение  $P_0$ . Значения  $\beta$  и  $\alpha$ , как правило, в уточнении не нуждаются.

Покажем на примере, как производится расчет контакта шероховатых тел.

Пусть шарик из стали ШХ 15 ( $\nu = 0,138 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2/\text{кг}$ ) диаметром  $\alpha_{\text{ш}} = 9,53 \text{ мм}$  контактирует с желобом внутреннего кольца шарикоподшипника, выполненного из того же материала, с радиусом желоба  $4,94 \text{ мм}$  и диаметром по дну желоба  $D_{\text{ж}} = 36,475 \text{ мм}$ . Поверхности шарика и желоба одинаково полированы до  $\nabla 10$ . Для этого вида обработки (см. приложение III)  $H_{\text{max}} = 0,0012 \text{ мм}$ ; радиус закругления вершин неровностей  $I \text{ мм}$ ;  $\alpha = 3,5$ ;  $\gamma = 1,5$ .  
Находим величины  $B$  и  $A$ :

$$B = \frac{z_{\text{ж}} - z_{\text{ш}}}{2 \cdot z_{\text{ж}} \cdot z_{\text{ш}}} = \frac{4,94 - 4,765}{2 \cdot 4,94 \cdot 4,765} = 0,00372 \text{ } \frac{1}{\text{мм}}$$

$$A = \frac{R_{\text{ж}} + z_{\text{ш}}}{2 \cdot R_{\text{ж}} \cdot z_{\text{ш}}} = \frac{18,24 + 4,765}{2 \cdot 18,24 \cdot 4,765} = 0,1325 \text{ } \frac{1}{\text{мм}}$$

По табл.8 для  $B/A = 0,028$  и  $n = m = 2$  находим  $\sqrt{1-e^2} = 0,094$ ;  $\lambda = 1,524$ . По формуле (II6) для  $P = 500$  кг определяем:

$$b_2 = 1,524 \left( \frac{500 \cdot 0,276 \cdot 10^{-4}}{0,00372} \right)^{1/3} = 2,36 \text{ мм};$$

$$a_2 = b_2 \sqrt{1-e^2} = 2,36 \cdot 0,094 = 0,222 \text{ мм}.$$

По формуле (II2) для  $q = 3$

$$P_0 = \frac{500 \cdot 3}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,22 \cdot 2,36} = 456 \text{ кг/мм}^2.$$

Так как шероховатость поверхности довольно низка, будем считать, что между микровыступами будет происходить преимущественно упругий контакт. Для поверхностей с одинаковой обработкой

$$H_{\max} = 2 \cdot 0,0012 = 0,0024 \text{ мм}; \quad \nu = 2 \cdot 0,138 \cdot 10^{-4} = 0,276 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2/\text{кг};$$

$$\gamma = 2 \cdot 1,5 = 3; \quad d = 2^{2 \cdot 1,5} \cdot 3,5^2 \cdot 0,4 = 35,6; \quad z = 0,5 \text{ мм}.$$

По формуле (II7) находим:

$$\alpha_{\text{ом}} = \left[ \frac{0,75 \cdot 3,14^2 \cdot 0,5^{0,5} \cdot 0,276 \cdot 10^{-4} \cdot 456}{0,5 \cdot 3 \cdot (3-1) \cdot 35,6} \right]^{2/3} = 0,000684 \text{ мм}.$$

Тогда

$$b = (2,36^2 + \frac{0,000684}{0,00372} \cdot 2,36)^{1/2} = 2,38 \text{ мм};$$

$$a = 2,38 \cdot 0,094 = 0,224 \text{ мм}.$$

Уточняем значение  $P_0$  :

$$P_0 = \frac{500 \cdot 3}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,224 \cdot 2,38} = 448 \text{ кг/мм}^2.$$

При необходимости по формуле (99) с учетом деформации микровыступов определяется сближение шероховатых тел. По табл.7  $\zeta_0 = 1,87$ , поэтому

$$\alpha_0 = \frac{500 \cdot 0,276 \cdot 10^{-4}}{2,36} \cdot 3 \cdot 1,87 + 0,000684 = 0,0335 \text{ мм.}$$

Как видно, деформация микронеровностей составляет небольшую (2%) долю в общей величине сближения упругих тел.

На рис. 14 и 15 показаны зависимости относительной площади контакта шарика с желобом К (отношение площадей шероховатых и абсолютно гладких тел) от шероховатости поверхности контактирующих тел при двух значениях  $n$  и двух различных внешних нагрузок. Начальное расстояние между шариком и желобом задавалось уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= 0,1325 x^2 \\ z_1 - z_2 &= 0,0191 |y|^3 \end{aligned} \right\} \text{— для } n=3 \text{ (кривая 2)}$$

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= 0,1325 x^2 \\ z_1 - z_2 &= 0,00884 y^2 \end{aligned} \right\} \text{— для } n=2 \text{ (кривая 1)}$$

Значения коэффициента В в обоих случаях подбирались таким образом, чтобы эксцентриситеты эллипса контакта были одинаковы.

По данным [43], шероховатости поверхностей  $\nabla 7$  и  $\nabla 9$ , полученных шлифованием, соответствуют следующие значения необходимых для расчета величин (см. приложение III):

- для  $\nabla 7$   $z = 0,004$  мм;  $H_{\max} = 0,00938$  мм;  $d = 0,6$ ;  $\gamma = 2,0$ ;
- для  $\nabla 9$   $z = 0,012$  мм;  $H_{\max} = 0,0024$  мм;  $d = 1,27$ ;  $\gamma = 1,9$ .

Как видно из рисунков, с увеличением шероховатости поверхности размеры пятна контакта увеличиваются, причем тем интенсивнее,



Рис.14.График зависимости относительной площади контакта К от шероховатости поверхности сжимаемых тел при большой нагрузке.

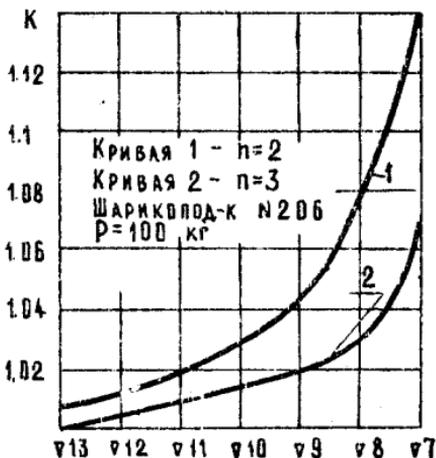


Рис.15.График зависимости относительной площади контакта К от шероховатости поверхности сжимаемых тел при малой нагрузке.

чем меньше нагрузка на контакте. Более интенсивное увеличение пятна касания при малых нагрузках объясняется большей долей деформации микронеровностей в общей деформации поверхностей контактирующих тел.

Примерно такие же результаты увеличения пятна контакта при возрастании шероховатости сжимаемых тел приводятся в работе С.В.Пинегина [39]. По данным С.В.Пинегина, отношение фактической площади контакта в расчетной по формулам Герца при сжатии шариков с поверхностями желобов колец шарикоподшипников составляет:

для полированной поверхности  $\nabla 11 \frac{1}{K} = 0,95; K = 1,05;$

для шлифованной поверхности  $\nabla 8 - \nabla 9 \frac{1}{K} = 0,9; K = 1,11;$

для шлифованной поверхности  $\nabla 6 - \nabla 7 \frac{1}{K} = 0,85$ ;  $K=118$ .

Рисунки 14 и 15 показывают также значительное влияние на размеры пятна касания геометрической формы контактирующих шероховатых тел. При  $n = 3$  чувствительность размера пятна контакта к шероховатости поверхностей контактирующих тел значительно ниже, чем при  $n = 2$ . Размеры пятна контакта влияют на силы трения контактирующих тел и с этой точки зрения окажется рациональным использование больших значений  $n$ .

Особенно сильное влияние шероховатость контактирующих тел оказывает на изменение контактных напряжений в крайнем поверхностном слое. Фактическое контактное напряжение можно определить, взяв отношение расчетных контактных напряжений  $P_p$  для гладких поверхностей и фактической площади контакта  $A_2$ :

$$P_{\varphi} = \frac{P_p}{A_2}$$

Как известно из [11], [24], фактическая площадь контакта определяется выражением

$$A_2 = \alpha A_e \cdot d \varepsilon^4 \quad (149)$$

Тогда

$$P_{\varphi} = \frac{P_p}{\alpha A_e d \varepsilon^4} \quad (150)$$

где  $A_e$  - контурная площадь контакта,  $\alpha$ ,  $d$  и  $\varepsilon$  имеют те же значения, что и в соотношениях (141), (142) и (143).

Исследованиями фактических контактных напряжений, возникающих на шероховатых контактирующих поверхностях, занимался А.И. Петрусевич. Он показал, что шероховатость поверхностей контак-

дирующих тел вызывает дополнительные контактные напряжения, которые зависят не только от абсолютной величины неровностей, но и от их формы.

Нас, помимо этого, интересует ещё и влияние на фактическое давление геометрической формы контактирующих тел. На рис. 16 показана зависимость фактических контактных напряжений в центре площадки контакта от шероховатости поверхности контактирующих тел для условий предыдущего примера. Величина давления  $P_{\phi}$

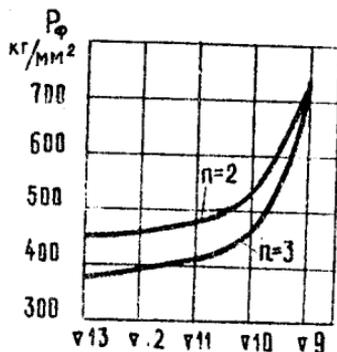


Рис.16. Зависимость фактического давления  $P_{\phi}$  в центре площадки контакта от шероховатости поверхности контактирующих поверхностей.

подсчитывалась по формуле (150),

причем в качестве расчетного напряжения  $P_p$  использовалось напряжение, подсчитанное по формуле (98).

Из рисунка видно, что при высоких классах чистоты поверхности соприкасающихся тел контактные напряжения для тел, начальное расстояние между которыми описывалось эллиптическим параболоидом с показателем степени в сечении, равным трем, в данных условиях обеспечивается меньшим, чем для случая, когда это значение  $n = 2$ . Однако с увеличением шероховатости поверхности разница эта уменьшается, а при 3-ом классе чистоты поверхности, когда начинается пластическое течение металла на контакте, контактные давления перестают зависеть от геометрической формы контактирующих тел.

Из рисунка видно также, как значительно могут увеличиться фактические контактные напряжения под влиянием шероховатости поверхности по сравнению с сжатием гладких тел. При изменении шероховатости поверхности с  $\nabla 10$  до  $\nabla 9$  фактическое контактное напряжение возрастает примерно в 1,4 раза и достигает величины  $700 \text{ км/мм}^2$ . Такие высокие контактные напряжения в принципе возможны, если учесть наклеп металла, а также всестороннее сжатие единичной неровности соседними неровностями при их расплющивании.

На основании изложенного можно сделать вывод, что влияние геометрической формы контактирующих тел на контактные напряжения в крайнем поверхностном слое проявляется только при высоких классах чистоты их поверхностей. Поэтому для того, чтобы полностью реализовать все преимущества той или иной геометрической формы деталей, нужно иметь высокое качество их рабочих поверхностей.

## II. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЮ УПРУГИХ ТЕЛ

### § 1. Сопротивление трению скольжения

Трение скольжения является очень сложным процессом взаимодействия контактирующих тел, обусловленный большим многообразием взаимосвязанных факторов: силами молекулярного взаимодействия, пластическим отеснением материала, образованием мостиков сварки, несовершенством упругих свойств материалов, шероховатостью поверхности, наличием поверхностной энергии твердых тел, объемным деформированием материала, электрическими явлениями, возникающими при трении, образованием на поверхности трения пленок, их толщиной и свойствами, температурой на поверхности контакта, изменением физических и химических свойств трущихся материалов в процессе трения и некоторыми другими.

Обычно этот комплекс трудно учитываемых факторов выражается зависимостью

$$T = T_{ад} + T_{об}, \quad (151)$$

где  $T$  - сила, необходимая для относительного перемещения тел;

$T_{ад}$  - сила, расходуемая на преодоление адгезионных связей в зоне контакта;

$T_{об}$  - сила, затрагиваемая на объемное деформирование ма-

териалов.

Под адгезионным взаимодействием понимаются все виды межмолекулярного взаимодействия между твердыми телами. Силы межмолекулярного сцепления в значительной степени зависят от расстояния между молекулами контактирующих тел. С увеличением расстояния эти силы быстро убывают, а в точках фактического контакта достигают больших величин, вызывая процесс диффузии материалов. Если тела покрыты какими-либо пленками, то последние защищают тела от схватывания. Поэтому прочность адгезионной связи зависит от свойств этих пленок.

Адгезионную составляющую силы трения математически можно выразить следующей зависимостью [ 24 ] :

$$T_{AA} = A_2 \cdot T + \beta P_c, \quad (152)$$

где  $T$  - прочность адгезионной связи на срез при отсутствии нормального давления;

$\beta$  - коэффициент, характеризующий увеличение прочности на срез от нормального давления  $P_c$  :

$A_2$  - фактическая площадь контакта тел.

Значение  $T$  и  $\beta$  для некоторых материалов приведены в табл.9 [24], [34].

Таблица 9

Константы  $T$  и  $\beta$  для различных материалов

Материал	: кг/мм <sup>2</sup> :	$\beta$	:	Материал	: кг/мм <sup>2</sup> :	$\beta$
вольфрам	23	-		серебро	6,5	0,090
молибден	17	-		алюминий	3,0	0,043
титан	16	-		ванадий	1,8	0,250
хром	13	-		олово	1,25	0,012
платина	9,5	0,100		свинец	0,9	0,014
тантал	9,0	-		индий	0,05	-
медь	5,0	-				

Фактическая площадь контакта зависит от микрорельефа поверхностей контактирующих тел и определяется выражением (I49).

Подставляя это значение  $A_2$  в (I52), получим

$$T_{AA} = \alpha A_c d \varepsilon^y \tau + \beta p_c. \quad (I53)$$

Величина относительного сближения тел при деформировании микронеровностей  $\varepsilon$  определяется выражениями (I41), (I42) и (I43). Эти зависимости удобнее записать так:

$$\varepsilon = D \cdot p_c^{\frac{k}{y}}, \quad (I54)$$

где для упругого контакта

$$D = \left[ \frac{0,75 \pi^2 \nu \cdot z^{0.5}}{k, y (y+1) H_{\max}^{0.5} d} \right]^{\frac{2}{2y+1}}; \quad k = \frac{2y}{2y+1}; \quad (I55)$$

для пластического контакта

$$D = \left( \frac{1}{d c \sigma_s} \right)^{\frac{1}{y}}; \quad k = 1; \quad (I56)$$

при повторном приложении нагрузки

$$D = j \left( \frac{1}{d c \sigma_s} \right)^{\frac{1}{y}}; \quad k = 1. \quad (I57)$$

Тогда

$$T_{AA} = \alpha \tau d D^y A_c p_c^k + \beta p_c. \quad (I58)$$

Произведем расчет тангенциальной силы трения при перемещении упругих тел, начальное расстояние между которыми задано уравнением

$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= A |x|^m \\ z_1 - z_2 &= B |y|^m \end{aligned} \right\},$$

а площадка контакта представляет собой часть плоскости, ограниченную эллипсом. При этом давление на контакте выражается зависимостью (I31).

Элементарная тангенциальная сила трения на элементарной площадке контакта равна:

$$dT_{AA} = \alpha \tau dD^4 p^k(x, y) dx dy + \beta p(x, y) dx, dy.$$

Тогда полная сила трения

$$T_{AA} = 4\alpha \tau dD^4 \int_0^{\beta a(y)} \int_0^{\beta a(y)} p^k(x, y) dx dy + 4\beta \int_0^{\beta a(y)} \int_0^{\beta a(y)} p(x, y) dx dy.$$

Подставляя вместо давления  $p(x, y)$  его значение из (I31), определим:

$$T_{AA} = 4\alpha \tau dD^4 p_0^k \int_0^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^k \left[\frac{3-n}{2(n-1)} - \frac{3-m}{2(m-1)}\right] dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^k \frac{3-m}{2(m-1)} dx +$$

$$+ 4\beta \int_0^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)} - \frac{3-m}{2(m-1)}} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3-m}{2(m-1)}} dx.$$

Эти интегралы подобны интегралу (I09). Проводя аналогичные преобразования, получим:

$$T_{AA} = \alpha \tau dD^4 p_0^k \pi \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+2\right]} \alpha \beta + \beta P. \quad (I59)$$

Выразим  $P_0$  через  $P$ . Согласно (I34),

$$P_0 = \frac{P}{\pi \alpha \beta} \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right) \Gamma\left[\frac{3n-1}{2(n-2)}\right]}{\Gamma\left[\frac{m+1}{2(m-1)}\right] \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)}$$

Тогда

$$T_{AA} = \alpha \tau dD^4 (\pi \alpha \beta)^{1-k} p_0^k \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right) \Gamma\left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right]}{\Gamma\left[\frac{m+1}{2(m-1)}\right] \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)} \right\} \cdot$$

$$\frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+2\right]} + P\beta.$$

Обозначив

$$\Gamma = \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{m}{m-1}\right) \Gamma\left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right]}{\Gamma\left[\frac{m+1}{2(m-1)}\right] \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)} \right\}^k \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}k+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+2\right]}$$

запишем:

$$T_{AA} = \alpha \tau d D^y (\lambda a b)^{1-k} \rho^k \Gamma + \beta \cdot P. \quad (160)$$

Выражение (160) можно упростить, если учесть, что численные значения  $Y$  для различных видов и классов чистоты обработки колеблется в пределах от 1,15 до 2,2 (см. приложение III). Тогда значения  $k$  изменяются в пределах 0,82-0,9, а численные значения  $\Gamma$  не превышают 1,014 (табл. 10). Поэтому с точностью до 1,5% можно принять  $\Gamma = 1$ . С увеличением значений  $m, n$  и  $Y$  величина этой погрешности получается ещё менее значительная.

С учетом этого упрощения

$$T_{AA} = \alpha \tau d D^y (\lambda a b)^{1-k} \rho^k + \beta P. \quad (161)$$

Раскрывая значение

Таблица 10

$D$ , окончательно

Значения  $\Gamma$  при  $m = 2$

получим для упругого контакта

$$T = \alpha \tau d \left[ \frac{1,5 \pi^2 \tau \cdot 2^{0,5}}{k, y (y+1) H_{\max}^{0,5} d} \right]^k \cdot \rho^k (\lambda a b)^{1-k} + P \cdot \beta; \quad (162)$$

для пластического кон-

такта и повторного приложения нагрузки

$$T = K \tau \frac{P}{\sigma_s} + P \cdot \beta, \quad (163)$$

где  $K, \beta$  и  $\gamma$  — коэффициенты, имеющие те же значения, что

$k \backslash n$	2	3	5
0,82	1,014	1,007	1,010
0,86	1,008	1,004	1,004
0,9	1,006	1,001	1,001

и в формулах (I41), (I42), (I43);

$k$  - показатель степени, определяемый выражением (I55).

Таким образом, адгезионная составляющая силы трения зависит от физико-механических характеристик трущихся тел ( $\nu$ ), состояния поверхности трения ( $\tau, \beta$ ), микрорельефа поверхностей ( $H_{max}, d$ ) и внешней нагрузки ( $P$ ).

Как видно, с увеличением силы адгезии трущихся материалов, с уменьшением загрязненности поверхностей трения, при отсутствии смазки и окисных пленок сила трения увеличивается.

С уменьшением шероховатости поверхности, когда одновременно с уменьшением высоты микронеровностей ( $H_{max}$ ) увеличивается и коэффициент опорной кривой поверхности ( $d$ ), тангенциальная сила трения в условиях упругого контакта тоже уменьшается. В условиях пластического контакта шероховатость поверхности перестает оказывать влияние на силу трения.

Тангенциальная сила трения при пластическом деформировании микронеровностей прямо пропорциональна внешней нагрузке. При упругом контакте это влияние внешней нагрузки несколько ослабевает ( $k = 0,8+0,9$ ).

Очень незначительно при упругом контакте сила трения зависит от контурной площади контакта тел ( $\tau_{ab}$ ) и совершенно от нее не зависит при пластическом контакте микровыступов. Следовательно, геометрическая форма контактирующих тел не оказывает, практически, никакого влияния на сопротивление тангенциальному относительному перемещению контактирующих тел.

Найдем, объемную составляющую силы трения при упругом контакте. И.В.Крагельский [24] предлагает определять тангенциальное сопротивление, обусловленное упругим деформированием,

отношением работы  $A$  к пути, на котором она затрачена, умноженным на коэффициент потерь на гистерезис  $K_{гист}$ . Величина пути перемещения равна размеру  $2a$  пятна касания в направлении силы трения.

В соответствии с этим

$$T_{об} = \frac{A}{2a} K_{гист} \quad (I64)$$

В свою очередь, работа упругого деформирования затрачивается как на оттеснение микронеровностей ( $A_H$ ), так и на объемное деформирование самих тел ( $A_T$ ):

$$A = A_H + A_T.$$

При этом работа оттеснения может быть определена как произведение деформированного объема на среднее напряжение оттеснения. Объем деформации микронеровностей определяется по формуле [24]:

$$V_H = \frac{d \varepsilon^{y+1}}{(y+1) 2} H_{max} A_0.$$

Тогда

$$A_H = \frac{d \varepsilon^{y+1}}{2(y+1)} H_{max} A_e \sigma_T,$$

где  $\sigma_T$  - среднее напряжение оттеснения,

$$\sigma_T = \frac{P}{A_2} = \frac{2P}{d \varepsilon^y A_c} = \frac{2}{d \varepsilon^y} P_c;$$

$$A_H = \frac{\varepsilon A_e}{y+1} H_{max} P_c = \frac{D A_e}{y+1} H_{max} P_c^{\frac{2y+1}{2y+1}}.$$

В общем случае давление на площадке контакта - переменная величина. Поэтому объем работы упругого деформирования микронеровностей найдем интегрированием элементарной работы на элементарной площадке контакта по всей области контакта:

$$A_n = \frac{D H_{\max}}{y+1} \int_F p^{\frac{2y+3}{2y+1}}(x, y) dF. \quad (I65)$$

Интеграл в выражении (I65) подобен (I09). Проводя аналогичные преобразования и обозначив

$$\rho = \frac{2y+3}{2y+1}, \quad (I66)$$

получим

$$A_n = \frac{D H_{\max}}{y+1} \rho^{\rho} \pi a b \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+2\right]}.$$

Выражая  $\rho$  через внешнюю нагрузку  $P$ , найдем

$$A_n = \frac{D H_{\max}}{y+1} P^{\rho} (\pi a b)^{1-\rho} \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}+2\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}+1,5\right]} \right\}^{\rho}.$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+2\right]}. \quad (I67)$$

Обозначим

$$\Gamma_2 = \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}+2\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}+1,5\right]} \right\}^{\rho} \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-m}{2(m-1)}\rho+1,5\right] \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}\rho+2\right]}. \quad (I68)$$

Тогда

$$A_n = \frac{D H_{\max}}{y+1} P^{\rho} (\pi a b)^{1-\rho} \Gamma_2. \quad (I69)$$

Общий объем деформации материала контактирующих тел можно определить, примерно, положив, что

$$d(x, y) = d_0 - A x^m - B y^n,$$

где  $\alpha(x, y)$  - суммарная величина упругих перемещений контактирующих тел в произвольной точке зоны контакта.

Тогда общий объем деформации в зоне контакта

$$V_{об} = \int_F (\alpha_0 - Ax^m - By^n) dF = 4 \int_0^{\frac{a(y)}{b}} dy \int_0^{\frac{a(y)}{b}} (\alpha_0 - Ax^m - By^n) dx =$$

$$= 4 \left[ \alpha_0 \int_0^{\frac{a(y)}{b}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy - A \frac{a^m}{m+1} \int_0^{\frac{a(y)}{b}} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{m+1}{2}} dy - B a \int_0^{\frac{a(y)}{b}} y^n \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dy \right]$$

Обозначив

$$\frac{y^2}{b^2} = t,$$

найдем

$$V_{об} = 4 \left[ \alpha_0 \frac{ab}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt - A \frac{a^{m+1} b}{2^{m+1}} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{m+1}{2}} dt - \right.$$

$$\left. - B \frac{a b^{n+1}}{2} \int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt \right]$$

Или

$$V_{об} = \pi ab \left[ \alpha_0 \frac{2a^m \Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (m+1) \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} - \frac{B b^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)} \right]$$

Работа упругого деформирования равна:

$$A_{об} = \frac{V_{об} \cdot P}{\pi ab} = P \left[ \alpha_0 \frac{2a^m \Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (m+1) \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} - \frac{B b^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)} \right] \quad (170)$$

Упростим выражение (170). Так как

$$Aa^m = \alpha_0 - \alpha_a = \alpha_0 \frac{J_0 - J_a}{J_0},$$

$$Bb^n = \alpha_0 - \alpha_b = \alpha_0 \frac{J_b}{J_0},$$

то

$$A_{06} = P \alpha_0 \left[ 1 - \frac{2(J_0 - J_a) \Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(m+1) \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right) J_0} - \frac{J_b \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right) J_0} \right]. \quad (171)$$

Выражая  $\alpha$  через  $P$  (122), найдем:

$$A_{06} = \frac{P^2 (v_1 + v_2)(n+1)}{\delta} \left[ J_0 - \frac{2 \Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right) (J_0 - J_a)}{\sqrt{\pi}(m+1) \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) J_b}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)} \right]. \quad (172)$$

Обозначив

$$\Gamma_3 = J_0 - \frac{2 \Gamma\left(\frac{m+3}{2}\right) (J_0 - J_a)}{\sqrt{\pi}(m+1) \Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) J_b}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+4}{2}\right)} \quad (173)$$

Численные значения гамма-функций, входящих в выражение (173), определяются по специальным таблицам в зависимости от конкретных значений  $m$  и  $n$  (см. приложение П), а величины  $J_0$ ,  $J_a$  и  $J_b$  даны в табл. 5 и 7. При  $n = m$   $J_0 = \frac{K(e)}{n}$ ;  $K(e)$  - полный эллиптический интеграл I-го рода, определяемый по специальным таблицам (см. приложение I).

В соответствии с обозначением (173),

$$A_{06} = \frac{P^2 (v_1 + v_2)(n+1)}{\delta} \Gamma_3 \quad (174)$$

Подставляя (169) и (174) в (164), получим значение силы трения, обусловленное объемным деформированием материалов трущихся тел и микронеровностей их наружной поверхности:

$$\Gamma_{06} = \frac{D H_{\max}}{y+1} P^2 \frac{(\pi a b)^{1-e}}{2 a} K_{\text{гист}} \Gamma_2 + \frac{P^2 (v_1 + v_2)(n+1)}{2 \sigma b} K_{\text{инт}} \Gamma_3 \quad (175)$$

Формула (175) показывает, что объемная составляющая сил трения в значительной степени зависит от нагрузки ( $P$ ) размеров площадки контакта ( $a, b$ ) и геометрической формы контакти-

рующих тал ( $n, \Gamma_2, \Gamma_3$ ).

С увеличением внешней нагрузки объемная составляющая сил трения увеличивается в степени, большей единицы. Так как величина  $\rho$  больше единицы (166), то с увеличением размеров площадки контакта объемная составляющая силы трения уменьшается. Очень сложно  $T_{об}$  зависит от геометрической формы контактирующих тел, так как при изменении  $n$  и  $m$  изменяются коэффициенты  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ . В общем, значения этих коэффициентов уменьшается с увеличением  $n$  и  $m$  и потому должна уменьшаться объемная составляющая сил трения.

Из анализа формул (169) и (175) видно, что адгезионная и объемная составляющие по-разному влияют на общую силу трения, определяющуюся выражением (151). Так, адгезионная составляющая сил трения зависит от внешней нагрузки в степени меньшей единицы, и следовательно, при большей нагрузке её влияние уменьшается. Наоборот, влияние деформационной составляющей с увеличением внешней нагрузки увеличивается. Поэтому при малых нагрузках, очевидно, должна преобладать адгезионная составляющая, а при больших нагрузках - объемная составляющая сил трения.

С увеличением шероховатости поверхности адгезионная составляющая сил трения падает, а объемная составляющая увеличивается. Адгезионная составляющая почти не зависит или несколько увеличивается с увеличением размера пятна касания, а объемная составляющая с увеличением размеров зоны контакта уменьшается.

Формула (175) справедлива для упругого контакта микронеровностей, при котором деформационная составляющая имеет (

значительную величину только для материалов с малым модулем упругости. Во всех случаях второе слагаемое правой части выражения (175) превышает первое слагаемое, так как объемное деформирование материалов контактирующих тел намного больше объема деформирования микронеровностей.

## § 2. Трение вращения

Очевидно, что при трении вращения упругих тел с круговой площадкой контакта составляющая силы трения, вызванная деформацией материала контактирующих тел, будет отсутствовать. Некоторую часть от общей силы трения будет составлять сила трения, вызванная передеформированием микронеровностей поверхностей, но основную роль в сопротивлении вращению должна играть сила адгезии между материалами соприкасающихся тел.

Найдем адгезионную составляющую момента сил трения вращения упругих тел, имеющих круговую площадку контакта.

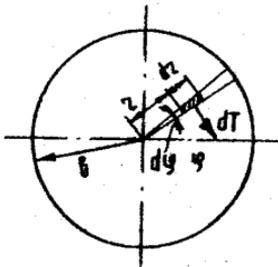


Рис.17.Схема для определения момента трения вращения.

Элементарный момент трения на элементарной площадке контакта (рис.17) равен

$$dM = r dT.$$

С учетом (152) и обозначения (154),

$$dM = \alpha \tau D^4 z^2 p_c^k dz d\psi + \beta z^2 p_c dz d\psi. \quad (176)$$

Полный момент трения от всей нагрузки на круговую площадку

$$\begin{aligned}
 M &= \alpha \tau \cdot d D^4 \int_0^{\delta} z^2 p^k(z) dz \int_0^{2\pi} d\varphi + \beta \int_0^{\delta} z^2 p(z) dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \\
 &= \alpha \tau \cdot d D^4 \pi \int_0^{\delta} z^2 p^k(z) dz + \beta 2\pi \int_0^{\delta} p(z) z^2 dz.
 \end{aligned}
 \tag{177}$$

Так как давление в зоне круговой площадки контакта выражается уравнением (47), то

$$M = \alpha \tau \cdot d D^4 \pi P_0^k \int_0^{\delta} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{\delta^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} dz + 2\pi \beta P_0 \int_0^{\delta} z^2 \left(1 - \frac{z^2}{\delta^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} dz.$$

Обозначим

$$\frac{z^2}{\delta^2} = t.$$

Тогда  $z = \delta \sqrt{t}$  ;  $dz = \delta \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ .

Отсюда момент сил трения

$$\begin{aligned}
 M &= \alpha \tau \cdot d D^4 \pi P_0^k \frac{\delta^3}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} dt + 2\pi \beta \frac{\delta^3}{2} P_0 \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} dt = \\
 &= \alpha \tau \cdot d D^4 \pi P_0^k \frac{\delta^3}{2} \frac{\Gamma(1,5) \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 2,5\right]} + \pi \beta P_0 \delta^3 \frac{\Gamma(1,5) \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} + 2,5\right]},
 \end{aligned}$$

или

$$M = 1,392 \alpha \tau d D^4 P_0^k \delta^3 \frac{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 2,5\right]} + 0,887 \pi \beta P_0 \delta^3 \frac{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} + 2,5\right]}.
 \tag{178}$$

Момент сил трения вращения можно выразить через внешнюю нагрузку. Используя уравнение (134), получим:

$$M = 0,443 \left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right]^k \alpha \tau d D^4 P_0^k \pi^{1-k} \delta^{3-2k} \frac{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 1\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)} k + 2,5\right]} +$$

$$+ 0,887 \beta P \delta \frac{\Gamma \left[ \frac{3-n}{2(n-1)} + 2 \right]}{\Gamma \left[ \frac{3-n}{2(n-1)} + 2,5 \right]} \quad (179)$$

Найдем частные значения крутящего момента. При  $n = 2$

$$M = 1,392 \cdot 0,796^k \cdot \tau d D^4 p^k \delta^{3-2k} \frac{\Gamma \left[ \frac{1}{2} k + 1 \right]}{\Gamma \left[ \frac{1}{2} k + 2,5 \right]} + 0,588 \beta P \delta.$$

При  $n = 3$

$$M = 1,045 \cdot 0,637^k \cdot \tau \alpha \cdot d D^4 p^k \delta^{3-2k} + 0,667 \beta \cdot P \cdot \delta.$$

При  $n = 1,5$

$$M = 1,392 \cdot 1,112^k \cdot \tau d D^4 p^k \delta^{3-2k} \frac{\Gamma(1,5k+1)}{\Gamma(1,5k+2,5)} + 0,491 \beta \cdot P \cdot \delta$$

Второе слагаемое выражение (179) соответствует формулам

Л.А.Галина [5]. Эти формулы были получены из условия, что тела абсолютно гладкие, а сила трения прямо пропорциональна внешней нагрузке. Так, для штампа в виде параболоида второй степени по Л.А.Галину

$$M = \frac{3\pi}{16} \beta P \delta,$$

а для равномерного распределения под штампом (в нашем случае  $n = 3$ )

$$M = \frac{2}{3} \beta P \delta.$$

Формула (179) получена с учетом шероховатости поверхностей контактирующих тел. С увеличением шероховатости поверхностей величина  $d$  значительно уменьшается, в результате чего уменьшается крутящий момент сил трения. С увеличением внешней нагрузки момент трения увеличивается в степени близкой к единице.

В степени большей единицы момент трения зависит от размера пятна контакта. В главе I было показано, что при прочих равных условиях на размер пятна контакта влияет геометрическая

форма контактирующих тел. Следовательно, правильный выбор геометрической формы контактирующих тел может обеспечить снижение потерь на трение, уменьшение износа и тепловыделения на опорах трения вращения.

### §3. Сопротивление перекачиванию упругих тел

Трение качения является ещё более сложным процессом, чем трение скольжения. В общем случае при трении качения существует микропроскальзывание и потому ему присущи все особенности трения скольжения. Помимо этого трение качения обладает своими специфическими особенностями.

Многообразие явлений, которыми сопровождается трение качения, затрудняет получение универсального решения этой задачи. Поэтому в настоящее время относительно механизма трения качения существует несколько теорий: 1) дифференциального скольжения [65, 26]; 2) пластической деформации [62]; 3) деформации материалов контактирующих тел [24]; 4) сцепления [69, 68, 1]; 5) потерь, связанных с петлей упругого гистерезиса [67, 16]; 6) зацепления контактных поверхностей [51, 53]; 7) теория ударов с небольшой амплитудой сухой поверхности; 8) трения в жидкости при смазанных поверхностях [55] и некоторые другие.

Очевидно, что реальный процесс качения упругих тел обладает всеми этими особенностями, причем все эти факторы взаимосвязаны и переплетаются между собой. На двойственный характер сопротивления качения указывает, например, С.В. Пинегин [38, 39]. Анализ влияния на сопротивление перекачиванию различных факторов он сопровождает результатами эксперименталь-

ных исследований, согласно которым коэффициент трения качения шара по прямолинейному желобу с уменьшением радиуса желоба сначала уменьшается, а при достижении некоторого своего значения начинает увеличиваться и достигает значительных величин.

Несмотря на большое многообразие явлений, сопровождающих процесс перекатывания упругих тел, в отдельных случаях он с достаточной точностью может описываться лишь некоторыми присущими ему факторами, оказывающими в данных условиях наиболее сильное влияние. При качении с низкой скоростью по смазанным поверхностям преобладающее влияние, по всей вероятности, оказывают микропроскальзывание в зоне контакта и несовершенная упругость материала контактирующих тел.

В данном разделе предпринята попытка учесть влияние этих факторов при расчете сопротивления перекатыванию шероховатых упругих тел. Задачу будем решать для общего случая контактирования, когда начальное расстояние между телами описывается уравнением (110). Однако в направлении качения тела, в подавляющем большинстве случаев, представляют собой либо дуги окружностей, либо сочетание окружностей с прямыми линиями, начальное расстояние между которыми хорошо описывается параболической зависимостью. Поэтому в дальнейшем примем показатель формы контактирующих тел  $m$  равным двум, а площадку контакта — расположенной своей малой полуосью в направлении качения.

Таким образом, начальное расстояние между телами задано уравнением:

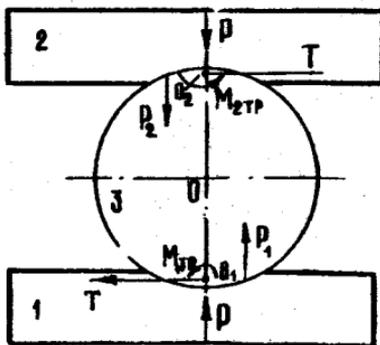
$$\left. \begin{aligned} z_1 - z_2 &= Ax^2 \\ z_1 - z_2 &= By^n \end{aligned} \right\}, \quad (180)$$

а площадка контакта в виде эллипса расположена в направлении качения своей малой полуосью.

Пусть тело закато между двумя упругими телами нормальной силой  $P$  (рис.18) и перекачивается между ними под действием тангенциальной силы  $T$ . Несмотря на действие этих сил в начальный момент времени тела остаются неподвижными, так как, с одной стороны, под действием тангенциальной силы в зоне контакта возникает асимметричный эпюр давления, вызывающий реактивные нормальные силы  $F_{12}, F_{22}$ , а с другой стороны - моменты трения  $M_{TP}, M_{TP2}$  вокруг относительных мгновенных осей вращения  $O_1$  и  $O_2$ , предотвращающие тело 3 от проскальзывания в направлении перемещения.

В случае равномерного относительного движения взаимодействующих тел имеет место уравнение

$$T \cdot D = M_{TP1} + M_{TP2} + M_{21} + M_{22}, \quad (181)$$



где  $D$  - диаметр тела качения;  
 $M_{21}, M_{22}$  - моменты нормальных сил, вызванные несимметричным характером распределения давления на площадках контакта тела 3 с телами 1 и 2.

рис.18.Схема процесса перекачивания упругих тел

Моменты сил  $M_{21}, M_{22}$  определяются эпюрой контактных напряжений. При медленном качении тел характер нагружения на передней части площадки контакта ( в направлении относительного перемещения тела  $\mathcal{Z}$ ) и, следовательно, эпюра контактных напряжений соответствует обычному стационарному нагружению и обычной эпюре контактных напряжений, выраженной уравнением (131). Характер распределения контактных напряжений на задней площадке контакта будет иным. Примем это напряжение равным

$$P_z(x, y) = P_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)} - \omega} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\omega} \quad (182)$$

Таким образом, нормальное напряжение на площадке контакта в направлении относительного перемещения при качении тел изменяется по закону, изображенному на рис. 19. При этом изменение контактных напряжений на задней площадке контакта так невелико, что практически можно пренебречь изменением размеров площадки контакта. Это положение подтверждается экспериментальными исследованиями [39], которые показывают

отсутствие какой-либо асимметрии в перемещениях вокруг контакта в случае свободного качения с малой скоростью. В таком случае момент сил, вызванный несимметричным характером распределения контактных напряжений, определится уравнением:

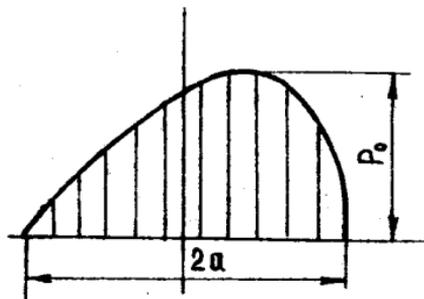


Рис.19. Распределение контактных напряжений при качении тел.

$$M_2 = 2 P_0 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)}} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} x dx -$$

$$- 2 P_0 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3-n}{2(n-1)-\omega}} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\omega} x dx.$$

(183)

Обозначим

$$\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = t; \quad u = \frac{y^2}{b^2}.$$

Найдем

$$x = a \sqrt{t \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)}; \quad dx = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}}; \quad dy = \frac{b}{2\sqrt{u}} du.$$

Тогда

$$M_2 = \frac{1}{2} b a^2 P_0 \int_0^1 (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)+1}} u^{-\frac{1}{2}} du \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} dt -$$

$$- \frac{1}{2} b a^2 P_0 \int_0^1 (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)+1}} u^{-\frac{1}{2}} du \int_0^1 (1-t)^{\omega} dt.$$

После несложных преобразований определим

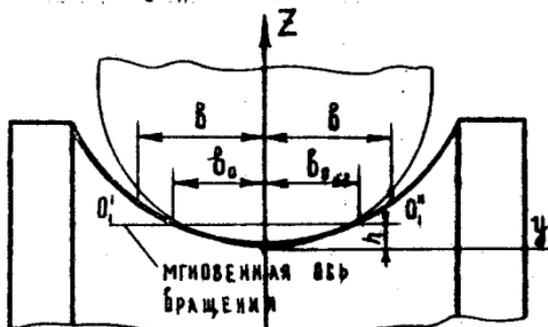
$$M_2 = \frac{1}{6} b a^2 P_0 \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right] (2\omega-1)}{\Gamma\left[\frac{2n-1}{n-1}\right] (\omega+1)} \quad (184)$$

Момент сил трения качения, вызванный несовершенными упругими свойствами материалов взаимодействующих тел, удобнее выразить через внешнюю нагрузку  $P$ . В таком случае на основании уравнения (134) при  $m = 2$  найдем:

$$M_2 = \frac{P \cdot a (n-1)}{3\pi n} \cdot \frac{\Gamma^2\left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right] (2\omega-1)}{\Gamma^2\left[\frac{n}{n-1}\right] (\omega+1)} \quad (185)$$

При малой скорости качения можно принять  $\omega = 0,515$ .

Моменты сил трения на площадках контакта  $M_{\text{ТР1}}, M_{\text{ТР2}}$  зависят от профиля площадки контакта в поперечном сечении и от положения мгновенных осей вращения  $O_1$  и  $O_2$  (рис.20). Уравнение профиля площадки контакта в поперечном сечении контактирующих тел можно записать в виде



тирующих тел можно записать в виде

$$z = ay^{\frac{1}{2}} \quad (186)$$

Тогда положение мгновенной оси вращения  $O'-O''$  определится выражением

$$h = ab_0^{\frac{1}{2}}$$

Рис. 20. Поперечный профиль контактирующих тел.

При этом момент трения равен

$$\begin{aligned} M_{\text{ТР}} &= 4a \int_0^{b_0} dy \int_0^{a(y)} T(x, y) (b_0^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) dx + 4a \int_0^{b_0} dy \int_0^{a(y)} T(x, y) (y^{\frac{1}{2}} - b_0^{\frac{1}{2}}) dx = \\ &= 8a \int_0^{b_0} dy \int_0^{a(y)} T(x, y) (b_0^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}) dx + 4a \int_0^{b_0} dy \int_0^{a(y)} T(x, y) (y^{\frac{1}{2}} - b_0^{\frac{1}{2}}) dx, \end{aligned} \quad (186)$$

где  $T(x, y)$  - касательное усилие на площадке контакта.

Касательное усилие может возникнуть либо за счет проскальзывания, либо за счет дополнительных упругих смещений на поверхности контакта. Но так или иначе в зоне сцепления (в зоне отсутствия проскальзывания) упругие касательные силы должны уравновешивать силы трения. Поэтому в дальнейшем примем, что касательное усилие в зоне контакта при условии упругого контактирования микронеровностей поверхности тел, так же как и в случае поступательного относительного переме-

нения, определяется уравнением (152), а момент трения равен

$$\begin{aligned}
 M_{\text{тр}} = & 4\alpha \tau d D^2 \rho_0^k \left[ 2 \int_0^{\beta_0} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} (l_0^f - y^f) dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}k} dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\beta} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}k} (y^f - l_0^f) dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}k} dx \right] + \\
 & + 4\beta Q \rho_0 \left[ 2 \int_0^{\beta_0} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} (l_0^f + y^f) dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{2}k} dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\beta} (y^f - l_0^f) \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}k} dx \right].
 \end{aligned}
 \tag{187}$$

Интегралы, входящие в (187), решаются подстановкой

$$t = \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{y^2}{\beta^2}\right)}; \quad u = \frac{y^2}{\beta^2}. \tag{188}$$

После преобразований, подобных преобразованиям (109), определим

$$\begin{aligned}
 M_{\text{тр}} = & \alpha \tau d D^2 \rho_0^k a \beta^{f+1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k+1,5\right)} \left[ 2 \int_0^{\beta_0} (l_0^f - u^{\frac{1}{2}}) u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{2-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 (u^{\frac{1}{2}} - l_0^f) u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{2-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du \right] + 4\beta Q \rho_0 a \beta^{f+1} \frac{\pi}{2} \left[ 2 \int_0^{\beta_0} (l_0^f - u^{\frac{1}{2}}) u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}k} du + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 (u^{\frac{1}{2}} - l_0^f) u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}k} du \right] = \alpha \tau d D^2 \rho_0^k a \beta^{f+1} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2}k+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k+1,5\right)} (2J_1 + J_2) + \\
 & + \beta Q \rho_0 a \beta^{f+1} \frac{\pi}{2} (2J_3 + J_4),
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

$$\text{где } \mathcal{J}_1 = \int_0^{\rho_0^2} (\rho_0^f - u^{\frac{f}{2}}) u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du ;$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^1 (u^{\frac{f}{2}} - \rho_0^f) u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du ;$$

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{\rho_0^2} (\rho_0^f - u^{\frac{f}{2}}) u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du ;$$

$$\mathcal{J}_4 = \int_0^1 (u^{\frac{f}{2}} - \rho_0^f) u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du , \text{ а}$$

$$\rho_0 = \frac{b_0}{b}$$

Интегралы  $\mathcal{J}_2$  и  $\mathcal{J}_4$  решаются в общем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \int_0^1 u^{\frac{f-1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du - \rho_0^f \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right) \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{f}{2}+2\right]} - \rho_0^f \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1,5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+2\right]} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4 &= \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du - \rho_0^f \int_0^1 u^{\frac{f}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\Gamma\left[\frac{n}{n-1} + \frac{f}{2} + 0,5\right]} - \rho_0^f \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{n-1} + \frac{1}{2}\right)} . \end{aligned}$$

Интегралы  $J_1$  и  $J_3$  зависят от частных значений  $n, f$  и  $k$ . Поэтому их решение будем искать при разложении подинтегральных выражений в ряд. Обозначим

$$m = \frac{3-n}{2(n-1)} k + \frac{1}{2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_1 &= \ell_0^f \int_0^{\ell_0^2} u^{-\frac{1}{2}} \left( 1 - mu + \frac{m(m-1)}{2} u^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} u^3 + \dots \right) du - \\ &- \int_0^{\ell_0^2} u^{\frac{f-1}{2}} \left( 1 - mu + \frac{m(m-1)}{2} u^2 - \frac{m(m-1)(m-2)}{6} u^3 + \dots \right) du = \\ &= 2\ell_0^{f+1} \left( 1 - \frac{m}{3} \ell_0^2 + \frac{m(m-1)}{10} \ell_0^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42} \ell_0^6 + \dots \right) - \\ &- 2\ell_0^{f+1} \left( \frac{1}{f+1} - \frac{m}{f+3} \ell_0^2 + \frac{m(m-1)}{2(f+5)} \ell_0^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{6(f+7)} \ell_0^6 + \dots \right) = \\ &= 2f\ell_0^{f+1} \left( \frac{1}{f+1} - \frac{m}{3(f+3)} \ell_0^2 + \frac{m(m-1)}{10(f+5)} \ell_0^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42(f+7)} \ell_0^6 + \dots \right) \quad (I9I) \end{aligned}$$

При целом положительном  $m$  ряд в правой части (I9I) - конечный и содержит  $m+1$  член. Интеграл  $J_3$  имеет значения, численно равные  $J_1$ , при  $k=1$ .

Выразим контактное напряжение в центре площадки контакта  $P_0$  через внешнюю нагрузку  $P$ :

$$P_0 = \frac{P}{\pi a b} \frac{2\Gamma\left[\frac{3n-1}{2(n-1)}\right]}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{n-1}\right)}$$

Подставив это значение  $P_0$  в (189), найдем

$$M_{TP} = Q \alpha \tau d D^2 P^k Q^{1-k} \beta^{f+1-k} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1.5)} \left\{ \frac{2 \Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{n-1})} \right\}^k (2J_1 + J_2) - \beta Q P \beta^f \frac{\Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{n-1})} (2J_3 + J_4).$$

Обозначив

$$N_1 = \left\{ \frac{2 \Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{n-1})} \right\}^k \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1.5)} (2J_1 + J_2),$$

$$N_2 = \frac{\Gamma[\frac{3n-1}{2(n-1)}]}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{n-1})} (2J_3 + J_4),$$

(192)

Окончательно получим

$$M_{TP} = Q \alpha \tau d D^2 P^k Q^{1-k} \beta^{f+1-k} N_1 + \beta Q P \beta^f N_2. \quad (193)$$

Значения коэффициентов  $N_1$  и  $N_2$ , входящих в формулу (193), зависят от положения мгновенной оси вращения тел, определяемого величиной  $\xi = \frac{b_0}{b}$ . Положение мгновенной оси вращения находится из условия, что алгебраическая сумма всех сил, действующих на контакте, равна тангенциальной силе трения качения

$$F_g = F_H = T, \quad (194)$$

где  $F_g$  - сила трения скольжения на контакте, расположенная от мгновенной оси вращения к центру тела качения 3;

$F_H$  - сила трения скольжения, расположенная от мгновенной оси вращения к периферии тела 3.

Известно, что силы трения-качения  $\Gamma$  составляют очень незначительную (тысячную) долю от сил трения скольжения. Поэтому с достаточной для практики точностью мгновенную ось вращения можно найти из условия

$$F_B - F_H = 0 \quad (I95)$$

При упругом контактировании микронеровностей, с учетом только адгезионной составляющей сил трения, имеем:

$$\begin{aligned} F_B - F_H &= \int_0^b \Gamma(x, y) dx, dy - 2 \int_0^b \Gamma(x, y) dx dy = \\ &= 4 Q \alpha \tau d D^{\gamma} P_0^k \left[ \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}k} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}k} dx - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}k} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx \right] + 4 Q \beta P_0 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} \\ &\quad \cdot dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{2-n}{n-1}} dy \int_0^{a(y)} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

После подстановки (I88) аналогично (I87) получим

$$\begin{aligned} F_B - F_H &= Q \alpha \tau d D^{\gamma} P_0^k \frac{Q \beta \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1.5)} \left[ \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du - \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^{\frac{a^2}{b^2}} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du + Q \beta P_0 \alpha \beta \frac{\pi}{2} \left[ \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \int_0^{\frac{a^2}{b^2}} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du \right] = Q \alpha \tau d D^{\gamma} P_0^k \frac{Q \beta \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2}k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}k+1.5)} \times \right. \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{3-n}{2(n-1)}k+1.5)}{\Gamma(\frac{3-n}{2(n-1)}k+2)} - 2 J_5 \right\} + Q \beta P_0 \alpha \beta \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{n-1})}{\Gamma(\frac{n}{n-1}+\frac{1}{2})} - 2 J_6 \right\}, \quad (I96) \end{aligned}$$

уде

$$J_5 = \int_0^{\ell_0^2} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{3-n}{2(n-1)}k+\frac{1}{2}} du;$$

$$J_6 = \int_0^{\ell_0^2} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{n-1}} du.$$

Интегралы  $J_5$  и  $J_6$  подобны интегралу  $J_4$ . Вводя обозначения

$$m = \frac{3-n}{2(n-1)}k + \frac{1}{2}$$

и раскладывая подынтегральное выражение в ряд, после преобразований определим

$$J_5 = 2\ell_0 \left( 1 - \frac{m}{3}\ell_0^2 + \frac{m(m-1)}{10}\ell_0^4 - \frac{m(m-1)(m-2)}{42}\ell_0^6 + \dots \right).$$

Интеграл  $J_6$  равен интегралу  $J_5$  при  $k = 1$ .

Значение  $\ell_0$  можно найти путем подбора такого его значения, при котором удовлетворялось бы уравнение (196). Для стали и многих других материалов (см. табл. 9) величиной можно пренебречь. В таком случае

$$J_5 = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+1.5\right]}{\Gamma\left[\frac{3-n}{2(n-1)}k+2\right]}, \quad (197)$$

а

$$M_{TP} = Q\tau_{\alpha} d D^y p^k a^{1-k} b^{f+1-k} N_1. \quad (198)$$

В таблице приложения IV даны значения  $\ell_0$  и соответствующего ему коэффициента  $N_1$  в зависимости от различных  $k$  и  $n$  при  $f = 2$ .

Определив по формуле (198) значения моментов сил трения, а по формуле (185) значения моментов сил, вызванных несовершенными упругими свойствами материалов взаимодействующих тел на контактах тела 3 с телами 1 и 2, несложно определить (187)

общий момент сил трения качения.

Формула (185) показывает, что на момент трения, вызванный потерями на гистерезис, наиболее значительное влияние оказывают внешняя нагрузка и размер площадки контакта в направлении перемещения. С увеличением внешней нагрузки и размера площадки контакта момент сил трения качения  $M_2$  увеличивается. Очень сложное влияние на момент  $M_2$  оказывает геометрическая форма контактирующих тел. С одной стороны, показатель геометрической формы тел  $n$ , как показано в главе I, влияет на размеры площадки контакта, а с другой стороны, непосредственно входит в формулу (185).

На момент трения качения (198), вызванный силами трения на контакте, значительное влияние оказывают: кривизна контактирующих тел в поперечном сечении ( $Q, f$ ), сила адгезии материалов тел ( $\tau$ ), микропрофиль контактирующих поверхностей ( $d, D^y$ ), внешняя нагрузка и размер площадки контакта в поперечном направлении ( $b$ ).

Величина  $Q$  зависит не только от величины начального зазора между телами, но и от изогнутости площадки контакта. Положение площадки контакта зависит от соотношения коэффициентов ( $\nu_1$  и  $\nu_2$ ), характеризующих упругие свойства контактирующих тел, и от геометрической формы контактирующих тел. В общем виде уравнение площадки контакта можно записать так:

$$Z_{na} = Z_1(y) - \frac{\nu_2 B}{\nu_1 \cdot 2} y^n, \quad (199)$$

где  $Z(y)$  - уравнение профиля тела качения.

Аппроксимируя (199) уравнением (186), можно найти значение  $Q$ . Например, при качении шара по желобу, выполнен-

тому из того же материала, что и шар, с достаточной точностью можно определить

$$Q = \frac{1}{2d_{ш}} - \frac{1}{4r_{ж}}, \quad (200)$$

где  $d_{ш}$  - диаметр шарика;  
 $r_{ж}$  - радиус желоба.

При качении шарика, или бочкообразного ролика по плоскости

$$Q = \frac{1}{2d_{ш}}.$$

При качении шарика по узкому желобу сложной геометрической формы независимо от значения  $n$  в уравнении (180) с достаточной точностью можно принять

$$Q = \left( \frac{1}{2d_{ш}} + \frac{B}{2} \right), \quad n = 2. \quad (201)$$

Сила адгезии между материалами контактирующих тел  $\tau$  зависит от вида этих материалов, а также наличия окисных пленок и смазки. Чем чище контактируемые поверхности, тем больше действие молекулярных сил и тем больше, следовательно, момент сил трения. Однако при толстых пленках и толстых слоях смазки начинают проявляться их объемные свойства и коэффициент трения может увеличиваться. При контактировании смазанных стальных поверхностей можно принять  $\tau = 16,9 \text{ кг/мм}^2$ .

Чем выше шероховатость поверхности контактирующих тел, тем меньше величина  $d \cdot D^y$ , и следовательно, при упругом контакте микронеровностей меньше момент трения качения. Но с увеличением шероховатости поверхности, как было показано в предыдущей главе, увеличиваются размеры площадки контакта,

это вызывает увеличение момента трения качения. К тому же при высокой шероховатости поверхности уже при малых нагрузках осуществляется переход от упругого деформирования микронеровностей к пластическому, что вызывает резкое повышение трения качения.

Увеличение внешней нагрузки вызывает сильное повышение момента трения качения. Это повышение вызвано ещё и тем, что с увеличением нагрузки возрастают размеры площадки контакта.

Формула (198) показывает, что изменение размера площадки контакта в направлении перемещения не вызывает значительных изменений момента трения качения, вызванного проскальзыванием на контакте, так как величина  $k$  близка к единице. Однако увеличение большой полуоси эллипса контакта влечет резкое возрастание момента  $M_{тр}$ .

Таким образом проявляется двойственный характер момента трения качения. При круглых площадках контакта, когда малая полуось площадки контакта  $a$  сравнительно велика, а изогнутость площадки контакта мала, проявляется в основном действие момента сил трения качения, вызванного несовершенством упругих свойств материалов контактирующих тел. С уменьшением размера малой полуоси эллипса контакта момент трения качения до определенного момента уменьшается, а затем будет резко возрастать, так как увеличивается размер большой полуоси эллипса контакта  $b$  и начинает проявляться действие момента сил трения на контакте.

Очень сложно на момент трения качения влияет геометрическая форма контактирующих тел. Его влияние проявляется через

размеры площадки контакта, показатели степеней и коэффициенты.

Из таблицы приложения IV видно, что положение мгновенной оси вращения тела качения зависит от геометрической формы контактирующих тел и шероховатости поверхности. При  $n = 2$  и  $k = 0,343$ , что соответствует качению шарика по желобу в обычных подшипниках качения,  $\rho_0 = 0,3546$ . Это соответствует эксперименту С.В.Пицегина [41], при котором износ шарика в центре площадки контакта на ширине около 30% от её большой оси получается наибольший. Затем он падает, снова возрастает и на границе площадки контакта исчезает.

На рис. 21 показана зависимость момента трения качения шарика по желобу внутреннего кольца шарикоподшипника для случая, соответствующего рис.13. Как видно, момент сил трения в значительной степени зависит от геометрической формы контактирующих тел.

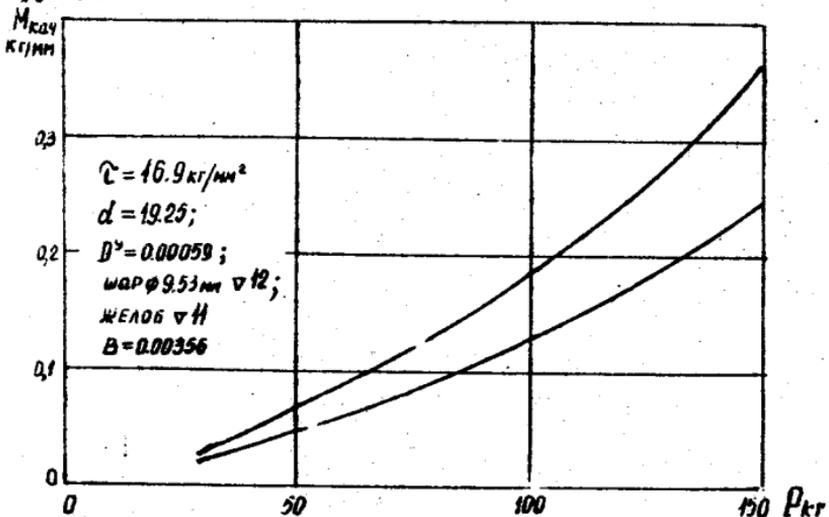


Рис.21. Зависимость момента трения качения  $M_{кач}$  шарика по желобу от внешней нагрузки P.

Результаты данного исследования помогут в конкретных условиях подбирать оптимальную геометрическую форму деталей, обеспечивающую минимальные силы трения качения при заданной грузоподъемности контакта, и тем самым увеличить долговечность и быстроходность узлов механизмов машин и приборов.

Приложение I

Таблица полных эллиптических интегралов I-го рода

$\alpha^\circ$	0	10	20	30	40	50	60	70	75	80	85
$K(e)$	1,5708	1,5828	1,6200	1,6858	1,7868	1,9356	2,1565	2,5046	2,7681	3,1534	3,8317

Приложение II

Таблица гамма-функций

$x$	1,00	1,10	1,20	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\Gamma(x)$	1,0000	0,95135	0,91817	0,89747	0,88726	0,88623	0,89352	0,90864	0,93133	0,96177	1,0000

Таблица параметров шероховатости поверхностей  
стальных деталей [17, 43]

Вид обработки	Класс чистоты	$R_{\max}$ , мкм	$R_z$ , мкм	$d$	$\gamma$
Круглое шлифование	7	9,38	8	0,6	2
	8	4,72	12	0,9	1,95
	9	2,40	20	1,27	1,9
	10	1,20	30	2	1,9
Внутреннее шлифование	6	18,75	5	0,65	2
	7	9,37	8	0,9	1,9
	8	4,72	13	1,1	1,85
	9	2,40	18,5	1,35	1,75
Плоское шлифование	5	37,50	35	0,625	2,2
	6	18,75	100	0,9	1,95
	7	9,37	180	0,95	1,85
	8	4,72	370	1,6	1,8
	9	2,40	550	2,3	1,65
Точение	5	37,50	15	1	2,1
	6	18,75	20	1,4	1,95
	7	9,37	35	1,8	1,8
	8	4,72	55	2	1,6
Торцевое фрезерование	5	37,50	425	0,4	2,2
	6	18,75	900	0,55	1,65
	7	9,37	1350	0,6	1,4
Полирование	8	4,72	230	2	1,7
	9	2,40	450	2,5	1,6
	10	1,20	670	3,5	1,5
	10	1,20	30	2,5	1,5
	11	0,60	40	2,55	1,4
Доводка цилиндрических поверхностей	12	0,30	55	2,6	1,3
	13	0,15	75	3,3	1,2

Продолжение приложения III

Вид обработки	Класс чистоты	$\delta_{\max}$ , мм	$\tau$ , мм	$d$	$y$
Доводка плоскостей	IO	1,20	300	2,4	1,6
	II	0,60	500	3	1,4
	I2	0,30	1000	3,3	1,22
	I3	0,15	3000	4,5	1,15
Хонингование	8	4,72	15	0,75	1,8
	9	2,40	20	1	1,75
	IO	1,20	35	1,95	1,6
	II	0,60	70	2,5	1,5

Приложение IV

Таблица значений  $\ell_c$  и  $N_i$   
( $f=2$ ;  $m=2$ )

$n$	$k$	$\ell_c$	$N_i$
1,5	1,0	0,2811	0,1172
	0,843	0,2934	0,1462
	0,7	0,3058	0,1810
2	1,0	0,3473	0,161
	0,843	0,3546	0,1970
	0,7	0,3618	0,2378
3	1,0	0,4039	0,1865
	0,843	0,4039	0,2220
	0,7	0,4039	0,2600

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А х м а т о в А.С. Влияние профиля и физико-химических свойств трущихся поверхностей на вид зависимости сил трения от смазки. - Труды конференции по трению и износу в машинах, т.П,М., 1940
2. Б а р т е н е в Г.М. О связи между структурой резины и ее коэффициентом трения. - Труды III Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах, т.П.,М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. Б е л я е в Н.М. К вопросу о местных напряжениях в связи с сопротивлением рельсов смятию. - Труды ЛИИПС, вып. 99, Л., 1929.
4. Б е л я е в Н.М. Местные напряжения при сжатии упругих тел. Инженерные сооружения и строительная механика. Л., "Путь", 1942.
5. Г а л и н Л.А. Контактные задачи теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
6. Г л а г о л е в Н.И. Трение и износ при качении цилиндрических тел. - "Инженерный журнал", 1964, т.1У, № 4.
7. Г л а г о л е в Н.И. Трение и износ. - Труды III Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах, т.П, М., Изд-во АН СССР, 1960.
8. Г р и н А.П. Трение между несмазанными металлами. Теоретический анализ модели металлического соединения. - "Машиностроение", 1955, № 8.

9. Г р и н А. П. Пластическое течение металлических соединений при совместном действии сдвига и нормального давления. - "Машиностроение", 1956, №6.
10. Г р у б и н А. Н. Контактные напряжения в зубчатых и червячных зацеплениях. Исследование контакта деталей машин М., Машгиз, 1949.
11. Д е м к и н Н. Б. Контактное шероховатых поверхностей. М., "Наука", 1970.
12. Д е р я г и н Б. В., Л а з а р е в В. П. Новый закон трения, его экспериментальная проверка и применение к трению минеральных дисперсоидов. - "Коллоидный журнал", 1935, т.1, вып. 4.
13. Д е р я г и н Б. В., Л а з а р е в В. П. Применение обобщенного закона трения к граничной смазке и механическим свойствам смазочного слоя. - Труды Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах, т.Ш., М.-Л., Изд-во АН СССР, 1949.
14. Д и н н и к А. Н. Удар и сжатие упругих тел. - Известия Киевского политехнического института, кн. 4, 1909.
15. Д и н н и к А. Н. Избранные труды, т.1, Изд-во АН УССР, 1952.
16. И ш л и н с к и й А. Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трения качения) и смежных явлений. - Труды конференции по трению и износу в машинах, т.П, М., Изд-во АН СССР, 1940.

17. Комбалов В.С. О комплексной оценке шероховатости поверхности. - В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., "Наука", 1971.
18. Коровчинский М.В. Распределение напряжений в окрестности локального контакта упругих тел при одновременном действии нормальных и касательных сил в контакте.- "Машиностроение", 1967, № 6.
19. Коровчинский М.В. Локальный контакт упругих тел при изнашивании их поверхностей. - В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., "Наука", 1971.
20. Крагельский И.В., Дерягин Б.В. О зависимости коэффициента сухого трения от нагрузки и шероховатости. - Труды II Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах, т. I, М.-Л, Изд-во АН СССР, 1947.
21. Крагельский И.В. Резниковский Н.М., Бродский Г.И., Непомнящий Е.Ф. Каучук и резана, 1965, № 9.
22. Крагельский И.В., Непомнящий Е.Ф., Харач Г.М. Усталостный механизм и краткая методика аналитической оценки величины износа поверхностей трений при скольжении. ИМАШ, 1967.
23. Крагельский И.В., Михин Н.М. О влиянии природы твердых тел на внешнее трение и о соотношении между адгезионной и объемной составляющей. - В сб: Теория трения и износа. М., "Наука", 1965.
24. Крагельский И.В. Трение и износ. М., "Машиностроение", 1968.

25. Кузнецов В.Д., Лоскутов А.И.,  
Коган Ю.И. Влияние смазок на процесс царапания металлов. - "Известия вузов. Физика", 1957, № I.
26. Кузнецов В.Д. Физика твердого тела, т. 4,  
Томск, изд-во "Красное знамя".
27. Леонов М.Я. К теории расчета упругих оснований. -  
Прикл. матем. и мех., 1939, т. III, вып. 2.
28. Леонов М.Я. Общая задача о давлении кругового  
штампа на упругое полупространство. Прикл. матем. и мех.,  
1953, т. 17, № I.
29. Дурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М., ГИИЛ, 1956.
30. Дурье А.И., Теория упругости. М., "Наука", 1970.
31. Лизарев А.Д., Сысоев П.В. Влияние касательных сил на деформации при контакте цилиндра с полупространством. - В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., "Наука", 1971.
32. Михин Н.М. О расчете усилий, действующих на сферический индентор при движении по пластическому полупространству. - В сб.: Трение твердых тел. М., "Наука", 1964.
33. Михин Н.М. Трение в условиях пластического контакта. М., "Наука", 1968.
34. Михин Н.М., Ляпин К.С., Добыгин М.Н. Исследование тангенциальной прочности адгезионной связи. - В сб.: Контактное взаимодействие твердых тел и расчет сил трения и износа. М., "Наука", 1971.
35. Моссаковский В.И. Давление штампа, близкого в плане к круговому, на упругое полупространство. -

Прикл. матем. и мех., 1954, т.18, № 6.

36. Моссаковский В.И. О перекачивании упругих тел. - Труды III Всесоюзного математического съезда, т. I. 1956.
37. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е, М.-Л., "Наука", 1966.
38. Пинегин С.В. О механизме качения при силовом контакте упругих тел. - Труды совещания по контактной прочности. ИМАШ, 1950.
39. Пинегин С.В. Контактная прочность и сопротивление качению. Изд. 2-я, М., "Машиностроение", 1969.
40. Пинегин С.В., Шевелев И.А., Гудченко В.М., Седов В.И., Блохин Ю.Н. Влияние внешних факторов на контактную прочность при качении. М., "Наука", 1972.
41. Пинегин С.В. Работоспособность деталей подшипников. М., Машгиз, 1949.
42. Рабко В.Д. К вопросу определения потерь на трение качения при больших скоростях и нагрузках. - Известия Сибирского отделения АН СССР, техническая наука", 1964, вып. I, № 2.
43. Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин. М., "Машиностроение", 1966.
44. Саверин М.М. Контактная прочность материала в условиях одновременного действия нормальной и касательной нагрузок. М., Машгиз, 1946.

45. Чертавских А.К. Трение и смазка при обработке металлов. М., Metallurgizdat, 1955.
46. Чертавских А.К., Рысеева В.И. Влияние окислов на внешнее трение металлов. - В сб.: Трение и износ в машинах, т. III. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1949.
47. Чичинадзе А.В., Браун Э.Д. Моделирование коэффициента внешнего трения. - В сб.: Теория трения и износ. М., "Наука", 1965.
48. Шевелев И.А. Исследование влияния внешних касательных сил на контактную прочность при качении. Автореферат диссертации. М., ИМАШ, 1971.
49. Шевелев И.А., Пинегин С.В. О совместном действии нормальных и касательных сил на контакте катящихся тел. - "Машиноведение", 1971, № 5.
50. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л., ГИИЛ, 1949.
51. Щедров В.С. Трение качения упругого шероховатого цилиндра по реальной плоскости. - Труды II Всесоюзной конференции по трению и износу в машинах, т. I, М., АН СССР, 1947.
52. Bentall R.H. and Johnson K.L. "Slip in the Rolling contact of Two dissimilar elastic rollers", J. of Mech Science, 1967, vol. 9
53. Bickerman J.J. J. Appl. Phys., 1949, v. 20
54. Bowden F.P., Tabor D. The friction and lubrication of solids. Oxford, 1964.

55. С а с а к и Т., О к и н о Н. Теория трения качения.
56. Carmichael G. D. and DAVIES P.B. Petroff Losses in Roller Bearings. Lubrication Engineering, 1971, №5, vol. 27.
57. GODDARD I., WILMAN H.A. Theory of Friction and Wear Durring The Abrasion of Metals. "Wear ", 1962, N2, vol. 5.
58. Jonson K. The Effect of a Fangential Contact Force upon the Rolling Motion of an Elastic Sphere on a Plane, Journ. of Appl. Mech, 80, 1958.
59. Ling F.F., SAIBEL K. On kinetic friction between unlubricat metallic surfaces. "Wear", 1957, n 3, vol. 1.
60. Mindlin R.D., Mason W.P., Osver T.F., Deresiewicz H. Effect of on oscillating tangential Force on the contact surfaces of Elastic Spheres, Proseedings of the First V.S. National Congress of Appl. Mechanics. Chicago, 1952.
61. Mindlin R.D. Complians of Elastic Bodies in Contact, Journal of Appl. Mecn, Trans. ASME, vol. 71, 1949.
62. Michell. Lubrication. London, 1950.
63. Palmgren A. Neue Untersuchungen Uber Energieverluste in Woltzlagern. V. D. J. Bd. 20, 1957.
64. Rabinowicz E. Friction and Wear of Materials. New York, 1965.
65. Reynolds O. On Rolling Friction. Phil. Transaction on the Royal Soc. V. 166, 1876.
66. Schleicher F. "Bauingenieur", Bd. 14, 1933.
67. Tabor D. The mechanism of Free Rolling Friction. Journal of the American Society of Lubrication Engineerings. Nov. Dec. 1956
68. Tomlinson G.A. Phil. Mag., 1927, v. 7.
69. Tomlinson G.A. A molecular theory of friction. Philosophical Magazine, n 7, June, 1929.
70. Tomlinson G.A. Molecular theory of Friction. "Phil. Magazine", 1929, vol. 7.

71. Vogel pohl G. Reibung und geometrische Form. "Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft", 1969 (1970).

72. Якусидэи, Масуда. Журнал "Тодай рингакэн хококу", 1949, т. 8.

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

П р е д и с л о в и е . . . . .	3
<b>I. РАСЧЕТ СЖАТИЯ УПРУГИХ ТЕЛ</b>	
§1. Общая методика расчета сжатия упругих тел . . . . .	8
§2. Энергетическая теория сжатия . . . . .	17
§3. Сжатие упругих тел, ограниченных поверхностями вращения . . . . .	23
§4. Соприкасание упругих тел с эллиптической площадкой контакта и с начальным расстоянием между телами, описываемым параболической зависимостью произвольной степени . . . . .	37
§5. Общий случай сжатия упругих тел . . . . .	61
§6. Сжатие шероховатых тел . . . . .	79
<b>II. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЮ УПРУГИХ ТЕЛ</b>	
§1. Сопротивление трению скольжения . . . . .	91
§2. Трение вращения . . . . .	102
§3. Сопротивление перекачиванию упругих тел . . . . .	105
П р и л о ж е н и е . . . . .	122
Л и т е р а т у р а . . . . .	125

Альберт Викторович Королев

Выбор оптимальной геометрической формы

контактирующих поверхностей деталей машин и приборов

Редактор А.И.Яровинская

---

НГ 47014.	Подписано к печати 27. <del>IV</del> . 1972 г.	
Печ.л. 8,5	Уч.-изд.л. 7,2	Тираж 500 экз.
Заказ 637	Цена 51 коп.	

---

Издательство Саратовского университета, Университетская, 42,  
ротапринт